Collège Adventiste de Maroua
Enseignement Secondaire Général
B.P. 45 Maroua
Tél : 22 29 12 06

Département de Mathématiques
Année Scolaire 2011-2012
Classe : $T^{le}C$, Coef : 5, Durée : 4 h
Prof : M. Loumsia A.

Baccalauréat Blanc / Épreuve de Mathématiques/ Novembre 2011

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [4.5 pts]

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3+4i}{5}z + \frac{1-2i}{5}$$

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
Démontrer que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x - 4y + 1) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$ 1pt

2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. 0.5pt

b. Quelle est la nature de l'application f. 0.5pt

3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M d'affixe z tels que z' soit réel. 0.5pt

4. On cherche à déterminer les points de $\mathcal{D}$ dont les coordonnées sont entières.

a. Donner une solution particulière $(x_0; y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x+3y = 2$. 0.5pt

b. Déterminer l'ensemble de solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x + 3y = 2$. 0.5pt

5. On considère les points M d'affixe $z = 1 + iy$ avec $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'. Déterminer les entiers y tels que $Re(z')$ et $Im(z')$ soient entiers. (*On pourra utiliser les congruences modulo 5*) 1pt

Exercice 2 [4.5 pts]

Partie A : Soit la fonction numérique $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.

1. Préciser l'ensemble de définition Df de f et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. 0.5pt×2

2. On considère la fonction $g : x \mapsto (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}) \sin(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$

a. Justifier que : $\forall x \in Df$, $g(x) = 2.\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}$. 0.5pt

b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. 0.5pt

c. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x \sin(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})\right]$. 0.5pt

Partie B : On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) - x$.

1. Déterminer la limite de φ en $-\infty$. 0.5 pt

2. a. Montrer que, pour tout réel x, $x > 0$, $\varphi(x) = x\left[\dfrac{2x\ln x}{x} + \dfrac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right]$. 1 pt

b. En déduire la limite de φ en $+\infty$. 0.5 pt

Problème [11points]

Partie A : On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{4}\sqrt{|-x^2+4x+12|}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormée.

1. Déterminer le domaine de définition de f. 0.5pt

2. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 2×0.25pt

3. C_f admet-elle de branches infinies ? si oui, déterminer leurs équations. 1pt

4. Exprimer $f(x)$ sans barres de valeur absolue. 0.5pt

5. Étudier la dérivabilité de f en -2 et en 6. 1pt

6. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations. 1.5pt

7. Montrer que l'inéquation $f(x) < 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. 0.5pt

8. Construire avec soins C_f en faisant ressortir : 1pt

- les demi-tangentes en -2 et en 6
- les branches infinies
- les extréma

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x + 1 - \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. 0.25pt ×2

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ 1.5pt

3. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$. 0.5 pt

4. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - \ln x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle. 0.5 pt

5. Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$. 0.5 pt

6. Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ qu'on notera α. 0.5 pt

7. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}. 0.5 pt

« Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. »
EUCLIDE D'ALEXANDRIE