GROUPE LANKÉ DIPITO FORMATION
Enseignement de Base, Secondaire Général
Technique Industriel et Commercial $\mathbf{1^{er}}$ et $\mathbf{2^{e}}$ Cycles
Ngousso / Nkolmesseng / Rue Manguiers
BP. 542 Yaoundé Tél : 22 21 52 72 / 22 21 35 93

COLLÈGE IPLEX ÉDUCATION E.S.G
ANNÉE SCOLAIRE 2008-2009
Classe $\mathbf{T}^{\text{le}}$ C Coef : 5 Durée : 4 h
Prof : M. Loumsia A.

SÉQUENCE N°2 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / NOVEMBRE 2008

Les calculatrices sont autorisées. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [**6pts**]

Partie A Soit la fonction numérique $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.

1. Préciser l'ensemble de définition Df de f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 1.5pt
2. On considère la fonction $g : x \mapsto (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}) \sin(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$
   (a) Justifier que : $\forall x \in Df,\ g(x) = 2\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}$. 0.5pt
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. 0.5pt
   (c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x \sin(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})\right]$. 1.5pt

Partie B Soit a et b deux nombres réels, f la fonction définie par : $f(x) = ax + b - \sqrt{x^2+1}$.

1. Étudier la limite de f en $-\infty$.(*On discutera suivant les valeurs de a*) 1pt
2. Déterminer a et b pour que la droite d'équation $2x - y + 2 = 0$ soit asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$. 1pt

Exercice 2 [**4.5pts**]

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique : 4 cm). Soit Ω le point d'affixe 2.
On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.
   (a) Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques. 0.75pt
   (b) Montrer que l'écriture complexe de σ est : $z \longmapsto \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z + 1 - \mathrm{i}$. 0.75pt
   (c) Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z - z' = \mathrm{i}\,(2 - z')$. 0.5pt
2. (a) Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = \mathrm{i}(p - a)$. 0.5pt
   (b) Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω. 0.5pt
3. Soit A_0 le point d'affixe $2 + \mathrm{i}$.
   On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :

$$\text{pour tout entier naturel} \quad n,\ A_{n+1} = \sigma\,(A_n)\,.$$

(a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2.$$

1pt

(b) Déterminer l'affixe de A_5. 0.5pt

Exercice 3 [**5.5pts**]

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss. 2×0.25pt
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout. 0.5pt

Partie B

Il s'agit d'une autre façon de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) $\begin{cases} n \equiv 13 \quad (19) \\ n \equiv 6 \quad (12) \end{cases}$

1. (a) Démontrer qu'il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$. 0.5pt
   (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).

   (b) Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S). 0.5pt
2. (a) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0 \quad (19) \\ n \equiv n_0 \quad (12) \end{cases}$ 0.5pt

   (b) Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 \quad (19) \\ n \equiv n_0 \quad (12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 \quad (12 \times 19)$. 1pt
   Rappel : ($p \Leftrightarrow q$) équivaut à ($p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$.)
3. (a) Trouver un couple $(u\ ;\ v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante. 2×0.5pt

   (b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.). 0.5pt
4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
   On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ? 0.5pt

Exercice4 [**4pts**]

Le plan complexe étant rapporté au repère orthonormé direct$(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note les points A et B les points d'affixes respectives $4 + 2i$ et $-2 - i$. On considère l'application f qui, à tout point M différent de B et ayant pour affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}$$

Déterminer puis construire dans le repère les ensembles suivants :

1. E_1 : ensembles des points M tels que $|z'| = 1$; 1pt
2. E_2 : ensembles des points M tels que $|z'| = 2$; 1pt
3. E_3 : ensembles des points M tels que z' soit réel ; 1pt
4. E_4 : ensembles des points M tels que z' soit imaginaire pur. 1pt