**LYCEE D'OTELE**
**BP 02**
**Département De Mathématiques**
www.doualamaths.net

Année scolaire 2009 / 2010
**3$^{e}$ SEQUENCES**
**Classe de T$^{le}$ C, durée 4h**
www.doualamaths.net

**<u>Exercice 1</u> : 3pts**

Soit p un entier naturel premier.

1) a) Démontrer que si k est un entier naturel tel que $1 \leq k \leq p-1$, le nombre $C_p^k$ est divisible par p. 0,75pt
   b) En déduire que, quel que soit l'entier naturel n, $(n+1)^p - n^p - 1$ est divisible par p. 0,75pt
2) Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n, $n^p - n$ est divisible par p. (On pourra faire un raisonnement par récurrence). 0,75pt
3) Montrer que, pour tout entier naturel n premiers avec p, $n^{p-1} - 1$ est divisible par p. 0,75pt

**<u>Exercice 2</u> : 2,5pts**

Dans le plan orienté, soit ABC un triangle tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ait pour mesure $\alpha$ appartenant à $]0;\pi[$. On construit extérieurement au triangle, les carrés ACRS, BAMN de sens direct, puis le parallélogramme MASD dont on note I le centre.

1) Faire une figure. 0,5pt
2) On note R le quart de tour direct de centre A.
   a) Quelles sont les images des point M et C par R ?. 0,5pt
   b) On note S' l'image de S par R. Montrer que A est le milieu de [CS'] . 0,5pt
   c) On note I' l'image de I par R. Montrer que I' est le milieu [BS']. 0,5pt
   d) En déduire que (AD) est perpendiculaire à (BC) et que AD = BC. 0,5pt

**<u>Exercice 3</u> : 5pts**

1) On considère la suite $(u_n)$ définie pour $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$
   a) Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$ . 1pt
   b) Pour $x \geq 0$, démontrer les inégalités suivantes :
   $\ln(1+x) \leq x$ et $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$. 1pt
   En déduire que, pour $k \geq 1$ : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ (1) 0,5pt
   c) A l'aide d'une sommation portant sur (1), prouver que, pour tout entier $n \geq 1$
   $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$ . 0,5pt
   En déduire que, pour tout $n \geq 1$ : $\ln(n+1) \leq u_n \leq 1 + \ln n$ (2) 0,5pt
   d) Quelle est la limite de la suite $(u_n)$. 0,5pt
   e) Déterminer un entier $n_0$ pour lequel $u_{n_0}$ dépasse 100. 0,5pt
2) On considère la suite $(c_n)$ définie pour $n \geq 2$ par
   $c_n = u_{n-1} - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n$ .
   a) Calculer $c_{n+1} - c_n$ . 0,25pt

En déduire le sens de variation de la suite $(c_n)$. 0,25pt

b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln n$. En déduire que la suite $(c_n)$ est majorée. 0,5pt

**PROBLEME : 9,5pts**



**PARTIE A**

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]-2;+\infty[$ par

$g(x) = (x+2)^2 - 1 + \ln(x+2)$.

1) Calculer $g'(x)$, en déduire le sens de variation de g. 0,75pt
2) Calculer g(-1) ; en déduire le signe de g(x), suivant les valeurs de x. 0,75pt

**PARTIE B**

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]-2;+\infty[$ par

$f(x) = x - \dfrac{\ln(x+2)}{x+2}$.

1) a) Déterminer les limites de f(x) quand x tend vers $-2^+$ et quand x tend vers $+\infty$ 1pt

   b) Démontrer que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+2)^2}$. 0 ,5pt

   c) Dresser le tableau de variation de f. 0,5pt

2) On appelle (C ) la courbe représentative de f et (D) la droite d'équation $y = x$.
   a) Démontrer que (C ) admet une asymptote verticale et la droite (D) comme asymptote oblique. 1pt
   b) Démontrer que(C) rencontre (D) en un seul point A, dont on précisera les coordonnées. 0,5pt
   c) Démontrer qu'il existe un unique point B de (C ), où la tangente (T) est parallèle à (D) ; préciser les coordonnées de B et une équation de (T). 1pt
   d) Tracer avec soin la courbe de (C), sans oublier ses asymptotes et la tangente (T), dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité sur les axes : 2cm) 2pts

3) On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $[-1;+\infty[$.
   a) Justifier que h est une bijection de $[-1;+\infty[$ sur $[-1;+\infty[$. 0,5pt
   b) Tracer la courbe (C') de $h^{-1}$, dans le même repère que (C). 1pt