

BACCALAUREAT BLANC N°2 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**Exercice 1** 3,5 pts

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B.

Sur la figure, on prendra 6 cm comme longueur du segment $[AB]$.

1. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = 3$ 0,75pt
2. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M du plan tels que $\left(\widehat{MA, MB}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ 0,75pt
3. Soit C l'image de B par la rotation de centre A et dont l'angle admet pour mesure $\frac{2\pi}{3}$ et D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. On désigne par S la similitude direct transformant A en B et C en D.
 - a. Déterminer l'angle et le rapport de S. 0,5pt
 - b. On note I le centre de la similitude S.
Exprimer IB en fonction de IA et donner une mesure de l'angle $\left(\widehat{IA, IB}\right)$ 0,5pt
En déduire la position du point I et le placer sur la figure. 0,5pt
 - c. Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD. (on ne demande pas de tracer ce cercle) 0,5pt

Exercice 2 3 pts

1. Montrer que pour tout entier relatif n , les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux. 0,25pt
2. On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - a. Vérifier en utilisant par exemple la question 1, que 87 et 31 sont premiers entre eux. 0,25pt
En déduire un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution (x_0, y_0) de (E). 0,5+0,5pt
 - b. Déterminer les solutions de (E) dans \mathbb{Z} 0,5pt
 - c. **Application** : Déterminer les points de la droite (D) d'équation $87x - 31y - 2 = 0$, dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est compris entre 0 et 100. 1pt

Exercice 3 3 pts

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points $F(0,4)$ et $D\left(0, \frac{3}{2}\right)$. On note (Δ) la droite passant par D et parallèle à l'axe des abscisses. (Γ) la conique dont les points M

vérifient : $\frac{MF}{d(M, (\Delta))} = 2$

1. Préciser la nature de (Γ) et déterminer son excentricité, un de ses foyers et la directrice associée à ce foyer. 1pt
2. a. Démontrer qu'une équation cartésienne de (Γ) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est $x^2 - 3y^2 + 4y + 7 = 0$ (0,5pt)
- b. En déduire l'équation réduite de (Γ) . Tracer cette conique. 1,5pt

Ce problème comporte trois parties. Les parties B et C ne sont pas dépendantes.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$; C_n est la courbe de f_n dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) avec $\|\vec{i}\| = 10\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$.

Partie A :

1. Étudier les variations de f_n sur $(0, +\infty[$. 1pt
 pour $n \geq 2$, étudier la position relative de C_n et de C_{n-1} et vérifier que le point de C_n , $A_n(n, f_n(n))$ est aussi sur C_{n-1} . 0,5pt
2. Construisez sur un graphique les courbes C_1, C_2 et C_3 1,5pt

Partie B :

Etude de la suite définie pour $n \geq 1$, $U_n = f_n(n)$

1. En utilisant la partie A, montrer que (U_n) est décroissante. 0,25pt
2. Soit la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}$. 0,5pt
 - a. montrer que pour tout t de $[0; 1]$, $\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4}$. 0,5pt
 - b. Déduisez-en que, pour tout entier $n \geq 1$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1 - \frac{1}{4n}}$. 0,5pt
3. a. montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$. 0,5pt
 - b. Déduisez-en que pour tout entier $n \geq 2$, $U_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4}(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1)}$. 0,5pt
4. a. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\int_1^n \frac{dt}{t} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$. 0,5pt
 - b. Déduisez que pour tout $n \geq 2$, $U_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4} \ln n}$. 0,5pt
 Quelle est la limite de la suite (U_n) . 0,25pt

Partie C :

Pour tout réel fixé, positif, et pour entier $n \geq 1$, on pose $I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt$

1. Calculez $I_1(a)$. 0,25pt
2. Montrez que pour $n \geq 1$, pour tout $t \geq 0$, $0 \leq f_n(t) \leq \frac{t^n}{n!}$. 0,25pt
 Déduisez un encadrement de $I_n(a)$. 0,25pt
3. montrez que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$. 0,5pt
 Donner alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$, puis la limite de $I_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$. 0,5pt
4. Trouver lorsque $n \geq 2$, une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ et déduisez-en que pour tout $n \geq 2$, : 1pt

$$I_n(a) = 1 - e^{-a} \left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right)$$
 L'égalité est-elle vraie pour $n = 1$? 0,25pt
5. Démontrez enfin que pour tout $a \geq 0$, $e^a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right)$. 0,5pt