BACCALAUREAT BLANC N°2 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 — 3,5 pts

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B.

Sur la figure, on prendra 6 cm comme longueur du segment $[AB]$.

1. Étudier et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = 3$ 0,75pt
2. Étudier et construire l'ensemble (F) des points M du plan tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ 0,75pt
3. Soit C l'image de B par la rotation de centre A et dont l'angle admet pour mesure $\dfrac{2\pi}{3}$ et D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. On désigne par S la similitude direct transformant A en B et C en D.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de S. 0,5pt
   b. On note I le centre de la similitude S.
   Exprimer IB en fonction de IA et donner une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)$ 0,5pt
   En déduire la position du point I et le placer sur la figure. 0,5pt
   c. Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD. (on ne demande pas de tracer ce cercle) 0,5pt

Exercice 2 — 3 pts

1. Montrer que pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premier entre eux. 0,25pt
2. On considère l'équation $(E) : 87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Vérifier en utilisant par exemple la question 1, que 87 et 31 sont premiers entre eux. 0,25pt
   En déduire un couple d'entiers relatifs (u,v) tel que $87u + 37v = 1$ puis une solution (x_0,y_0) de (E). 0,5+0,5pt
   b. Déterminer les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}$ 0,5pt
   c. **Application** : Déterminer les points de la droite (D) d'équation $87x-31y-2 = 0$, dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est compris entre 0 et 100. 1pt

Exercice 3 — 3 pts

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $F(0,4)$ et $D\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$. On note (Δ) la droite passant par D et parallèle à l'axe des abscisses. (Γ) la conique dont les points M vérifient : $\dfrac{MF}{d\left(M,(\Delta)\right)} = 2$

1. Préciser la nature de (Γ) et déterminer son excentricité, un de ses foyers et la directrice associée à ce foyer. 1pt
2. a. Démontrer qu'une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est $x^2 - 3y^2 + 4y + 7 = 0$ (0,5pt)
   b. En déduire l'équation réduite de (Γ). Tracer cette conique. 1,5pt

Problème **10,5pts**

Ce problème comporte trois parties. Les partie B et C ne sont pas dépendantes.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$; C_n est la courbe de f_n dans un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ avec $\|\overrightarrow{i}\| = 10cm$ et $\|\overrightarrow{j}\| = 1cm$.

Partie A :

1. Étudier les variations de f_n sur $(0, +\infty[$. 1pt
   pour $n \geqslant 2$, étudier la position relative de C_n et de C_{n-1} et vérifier que le point de C_n, $A_n(n, f_n(n))$ est aussi sur C_{n-1}. 0,5pt
2. Construisez sur un graphique les courbe C_1, C_2 et C_3 1,5pt

Partie B :

Etude de la suite définie pour $n \geqslant 1$, $U_n = f_n(n)$

1. En utilisant la partie A, montrer que (U_n) est décroissante. 0,25pt
2. Soit la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(t) = ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{4}$. 0,5pt
   a. montrer que pour tout t de $[0;1]$, $ln(1+t) \leqslant t - \dfrac{t^2}{4}$. 0,5pt
   b. Déduisez-en que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e^{1-\frac{1}{4n}}$. 0,5pt
3. a. montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant e^{-\frac{1}{4n}}$. 0,5pt
   b. Déduisez-en que pour tout entier $n \geqslant 2$, $U_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\dots+\frac{1}{2}+1\right)}$. 0,5pt
4. a. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$. 0,5pt
   b. Déduisez que pour tout $n \geqslant 2$, $U_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}$. 0,5pt
   Quelle est la limite de la suite (U_n). 0,25pt

Partie C :

Pour tout réel fixé, positif, et pour entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt$

1. Calculez $I_1(a)$. 0,25pt
2. Montrez que pour $n \geqslant 1$, pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \dfrac{t^n}{n!}$. 0,25pt
   Déduisez un encadrement de $I_n(a)$. 0,25pt
3. montrez que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n!} < \left(\dfrac{e}{n}\right)^n$. 0,5pt
   Donner alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$, puis la limite de $I_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$. 0,5pt
4. Trouver lorsque $n \geqslant 2$, une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ et déduisez-en que pour tout $n \geqslant 2$, :
   $I_n(a) = 1 - e^{-a \;\; 1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\dots+\frac{a^n}{n!}}$. 1pt
   L'égalité est-elle vraie pour $n = 1$? 0,25pt
5. Démontrez enfin que pour tout $a \geqslant 0$, $e^a = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right)$. 0,5pt