**COLLEGE BILINGUE L'ORCHIDÉE**
BP 11525 TEL 33 47 49 65
MAKEPE - DOUALA

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**
ANNÉE SCOLAIRE 2008-2009
Classe **T**$^{\text{le}}$ C Coef : 6 Durée : 4 h

# BACCALAUREAT BLANC N°2 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 — 3,5 pts

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. Sur la figure, on prendra 6 cm comme longueur du segment $[AB]$.

1. Étudier et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = 3$ 0,75pt
2. Étudier et construire l'ensemble (F) des points M du plan tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ 0,75pt
3. Soit C l'image de B par la rotation de centre A et dont l'angle admet pour mesure $\dfrac{2\pi}{3}$ et D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. On désigne par S la similitude direct transformant A en B et C en D.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de S. 0,5pt
   b. On note I le centre de la similitude S.
   Exprimer IB en fonction de IA et donner une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)$ 0,5pt
   En déduire la position du point I et le placer sur la figure. 0,5pt
   c. Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD. (on ne demande pas de tracer ce cercle) 0,5pt

## Exercice 2 — 3 pts

1. Montrer que pour tout entier relatif $n$, les entiers $14n+3$ et $5n+1$ sont premier entre eux. 0,25pt
2. On considère l'équation $(E) : 87x + 31y = 2$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.
   a. Vérifier en utilisant par exemple la question 1, que 87 et 31 sont premiers entre eux. 0,25pt
   En déduire un couple d'entiers relatifs $(u,v)$ tel que $87u + 37v = 1$ puis une solution $(x_0,y_0)$ de (E). 0,5+0,5pt
   b. Déterminer les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}$ 0,5pt
   c. **Application** : Déterminer les points de la droite (D) d'équation $87x - 31y - 2 = 0$, dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est compris entre 0 et 100. 1pt

## Exercice 3 — 3 pts

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $F(0,4)$ et $D\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$. On note $(\Delta)$ la droite passant par D et parallèle à l'axe des abscisses. $(\Gamma)$ la conique dont les points M vérifient : $\dfrac{MF}{d\left(M,(\Delta)\right)} = 2$

1. Préciser la nature de $(\Gamma)$ et déterminer son excentricité, un de ses foyers et la directrice associée à ce foyer. 1pt
2. a. Démontrer qu'une équation cartésienne de $(\Gamma)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est $x^2 - 3y^2 + 4y + 7 = 0$ (0,5pt)
   b. En déduire l'équation réduite de $(\Gamma)$. Tracer cette conique. 1,5pt

**Problème** **10,5pts**

***Ce problème comporte trois parties. Les partie B et C ne sont pas dépendantes.***

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $f_n$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ ; $C_n$ est la courbe de $f_n$ dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ avec $\|\vec{i}\| = 10cm$ et $\|\vec{j}\| = 1cm$.

**Partie A :**

1. Étudier les variations de $f_n$ sur $(0,+\infty[$. 1pt
   pour $n \geqslant 2$, étudier la position relative de $C_n$ et de $C_{n-1}$ et vérifier que le point de $C_n$, $A_n\,(n, f_n(n))$ est aussi sur $C_{n-1}$. 0,5pt
2. Construisez sur un graphique les courbe $C_1$, $C_2$ et $C_3$ 1,5pt

**Partie B :**

Etude de la suite définie pour $n \geqslant 1$, $U_n = f_n(n)$

1. En utilisant la partie A, montrer que $(U_n)$ est décroissante. 0,25pt
2. Soit la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(t) = ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{4}$. 0,5pt
   a. montrer que pour tout $t$ de $[0;1]$, $ln(1+t) \leqslant t - \dfrac{t^2}{4}$. 0,5pt
   b. Déduisez-en que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e^{1-\frac{1}{4n}}$. 0,5pt
3. a. montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant e^{-\frac{1}{4n}}$. 0,5pt
   b. Déduisez-en que pour tout entier $n \geqslant 2$, $U_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right)}$. 0,5pt
4. a. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$. 0,5pt
   b. Déduisez que pour tout $n \geqslant 2$, $U_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}$. 0,5pt
   Quelle est la limite de la suite $(U_n)$. 0,25pt

**Partie C :**

Pour tout réel fixé, positif, et pour entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt$

1. Calculez $I_1(a)$. 0,25pt
2. a. Montrez que pour $n \geqslant 1$, pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \dfrac{t^n}{n!}$. 0,25pt
   b. Déduisez un encadrement de $I_n(a)$. 0,25pt
3. a. Montrez que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n!} < \left(\dfrac{e}{n}\right)^n$. 0,5pt
   b. Donner alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$,
   puis la limite de $I_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$. 0,5pt
4. a. Trouver lorsque $n \geqslant 2$, une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ et
   déduisez-en que pour tout $n \geqslant 2$, $I_n(a) = 1 - e^{-a\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\ldots+\frac{a^n}{n!}\right)}$. 1pt
   b. L'égalité est-elle vraie pour $n = 1$ ? 0,25pt
5. Démontrez enfin que pour tout $a \geqslant 0$, $e^a = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\ldots+\frac{a^n}{n!}\right)$. 0,5pt