Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers juin 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.

On appelle A le point d'affixe -2i.

À tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -2\overline{z} + 2\text{i}.$$

1. On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2\text{i}$.
   Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur le dessin.
2. Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ).
3. Démontrer que pour tout point M d'affixe z, $\left|z' + 2\text{i}\right| = 2|z + 2\text{i}|$; interprétez géométriquement cette égalité.
4. Pour tout point M distinct de A on appelle θ un argument de $z + 2\text{i}$.

   a. Justifier que θ est une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{A}M}\right)$.

   b. Démontrer que $(z + 2\text{i})(z' + 2\text{i})$ est un réel négatif ou nul.

   c. En déduire un argument de $z' + 2\text{i}$ en fonction de θ.

   d. Que peut-on en déduire pour les demi-droites $[\text{A}M)$ et $[\text{A}M')$?

   5. En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé au point M.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,50 €.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\dfrac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\dfrac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'évènement : « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n, la probabilité de R_n et q_n, celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence.

   a. Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.

   b. Déterminer $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p\left(R_{n+1} \cap \overline{R_n}\right)$ en fonction de q_n

   c. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n.

   d. En déduire que $p_{n+1} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}p_n$.

2. Étude de la suite $\left(p_n\right)$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = p_n - \dfrac{4}{23}$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{20}$.

b. Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.

c. Justifier que la suite $\left(p_n\right)$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2 — 5 points

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

« *Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre* 1 *peuvent-ils être premiers*? »

Pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, on pose $N_p = 1\ldots1$ où 1 apparaît p fois.
On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0$.

1. Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1111$ sont-ils premiers?

2. Prouver que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9?

3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.
On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right).$$

a. On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

b. On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

c. On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.
En déduire que N_p est divisible par N_k.

4. Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
Cette condition est-elle suffisante?

Exercice 3 — 9 points

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise. Les fonctions f associées définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ doivent vérifier les conditions suivantes :

(1) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;

(2) f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$

(3) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) \leqslant x$.

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique 10 cm.

I. Première partie Étude d'un modèle

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$g(x) = x\mathrm{e}^{x-1}.$$

1. Prouver que g vérifie les conditions (1) et (2).

2. Montrer que $g(x) - x = \dfrac{x}{\mathrm{e}}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e})$ et en déduire que g vérifie la condition (3).
3. Tracer les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ et la courbe représentative de g dans le repère $\mathscr{R}$.

II. Seconde partie Un calcul d'indice

Pour une fonction f vérifiant les conditions (1), (2) (3), on définit un indice I_f égal à l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine plan M délimité par les droites d'équations $y = x$, $x = 1$ et la courbe représentative de f.

1. Justifier que $I_f = \displaystyle\int_0^1 \left[x - f(x)\right] \mathrm{d}x$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'indice I_g, associé à g.
3. On s'intéresse aux fonctions f_n, définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2x^n}{1+x}$$

où n est un entier naturel supérieur en égal à 2. On admet que ces fonctions vérifient les conditions (1), (2), (3) et on se propose d'étudier l'évolution de leur indice I_n lorsque n tend vers l'infini.

   a. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left[x - f_n(x)\right] \mathrm{d}x$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Prouver que $I_n = \dfrac{1}{2} - u_n$.

   b. Comparer $\dfrac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\dfrac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$; en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

   c. Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$0 \leqslant \frac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^n.$$

   d. En déduire que pourtout entier naturel $n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n+1}$.

   e. Déterminer alors la limite de I_n quand n tend vers l'infini.