Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers juin 2006

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

i. Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl}|z| & = & r\\ \arg z & = & \theta \text{ à } 2\pi \text{ près}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}z & = & r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\\ r & > & 0\end{array}\right.$$

ii. Pour tous nombres réels a et b :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\cos(a+b) & = & \cos a\cos b - \sin a \sin b\\ \sin(a+b) & = & \sin a\cos b + \sin b\cos a\end{array}\right.$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.

Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg\left(z_1\right) + \arg\left(z_2\right) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Partie B.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

1. Si $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, alors z^4 est un nombre réel.
2. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.
3. Si $z + \dfrac{1}{z} = 0$, alors $z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$.
4. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.

On lit le nombre sur la face cachée.

Pour $k \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4)$, on note p_i la probabilité d'obtenr le nombre k sur laface cachée.

Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres $p_1,\ p_2,\ p_3$ et p_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $p_4 = 0,4$ démontrer que $p_1 = 0,1,\ p_2 = 0,2$ et $p_3 = 0,3$.
2. On lance le dé trois lois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?

3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
   a. Pour $1 \leqslant i \leqslant 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement $(X = i)$.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geqslant 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.
4. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux.
   On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.
   a. Montrer que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.
   b. Calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$ puis étudier la convergence de la suite (S_n).
   c. Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 0,999$.

EXERCICE 2 — 5 points

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \mod p$ ».

Partie A. Quelques exemples.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3. Pour $1 \leqslant n \leqslant 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5. À l'aide des questions précédentes. déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $4^n \equiv 1 \mod p$.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \mod p$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \mod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.
   a. Démontrer que $4^r \equiv 1 \mod p$. En déduire que $r = 0$.
   b. Prouver L'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.
   c. En déduire que b divise $p - 1$.

EXERCICE 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe representative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, (unité graphique : 5 cm).

Partie A. Étude de la fonction f

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x) = \dfrac{\text{e}^x}{1+\text{e}^x}$.

Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Dresser le tableau des variations de f.

Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et ses asymptotes éventuelles dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie B. Quelques propriétés graphiques.

1. On considère les points M et M' de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées du milieu A du segment $[MM']$. Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y = 1$, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$, $\mathscr{A}_n$ désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire.

a. Calculer $\mathscr{A}_n$.

b. Étudier la limite éventuelle de $\mathscr{A}_n$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Calcul d'un volume.

Soit λ un réel positif, On note $\mathscr{V}(\lambda)$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\lambda}^{0} [f(x)]^2\,\text{d}x$.

On admet que $\mathscr{V}(\lambda)$ est une mesure. exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue pour $-\lambda \leqslant x \leqslant 0$.

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$\text{pour tout nombre réel } x : \frac{\text{e}^{2x}}{(\text{e}^x+1)^2} = \frac{a\text{e}^x}{\text{e}^x+1} + \frac{b\text{e}^x}{(\text{e}^x+1)^2}$$

2. Exprimer $\mathscr{V}(\lambda)$ en fonction de λ.

3. Déterminer la limite de $\mathscr{V}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

ABCDEFGH est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}} ; \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$

Partie A. Un triangle et son centre de gravité.

1. Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.

2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE.

a. Calculer les coordonnées de I.

b. Démontrer que $\overrightarrow{\text{AI}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AG}}$. Que peut-on en déduire pour les points A, I, G ?

3. Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

Partie B. Une droite particulière

Pour tout nombre réel k, on définit deux points M_k et N_k, ainsi qu'un plan $\mathcal{P}_k$ de la façon suivante :

- M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overrightarrow{\text{A}M_k} = k\overrightarrow{\text{AG}}$;
- $\mathcal{P}_k$ est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) ;
- N_k est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}_k$ et de la droite (BC).

1. Identifier $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.

2. Calcul des coordonnées de N_k.

  a. Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}} ; \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

  b. Déterniner une équation du plan $\mathcal{P}_k$ dans ce repère.

  c. En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1 ; 3k - 1 ; 0)$.

3. Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale â la fois aux droites (AG) et (BC) ?

4. Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?

5. Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$.

Tracer la droite $\left(M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}}\right)$ sur la même figure.

ANNEXE

Exercice 4 (commun à tous les candidats)