

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

1. Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \frac{1}{2}$.

c. Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geq N$, $v_n < \frac{3}{4}$.

d. En déduire que si $n \geq N$, alors $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$.

On pose pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n = u_5 + u_6 + \dots + u_n$.

2. On se propose de montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 5}$ est convergente.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 5$,

$$u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5.$$

b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 5$,

$$S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5.$$

c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n \leq 4u_5$.

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 5}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.

EXERCICE 2

6 points

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.

Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident.

On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.

On rappelle que la loi de probabilité est alors définie par :

$$p(D \leq A) = \int_0^A \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} dx.$$

Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millime.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

a. comprise entre 50 et 100 km ;

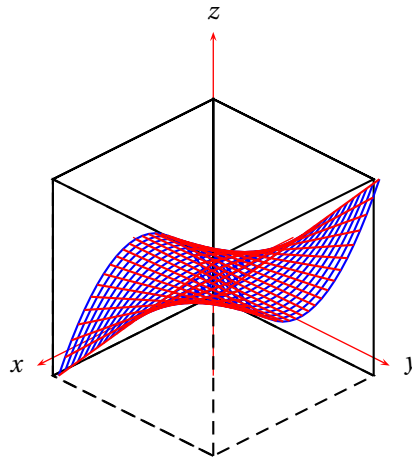
- b. supérieure 300 km.
2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres?
3. Détermination de la distance moyenne parcourue sans incident.
- a. Au moyen d'une intégration par parties, calculer $I(A) = \int_0^A \frac{1}{82} x e^{-\frac{x}{82}} dx$ où A est un nombre réel positif.
- b. Calculer la limite de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. (Cette limite représente la distance moyenne cherchée).
4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$.
- d tant un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.
- a. Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\lambda d}$.
- b. Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

EXERCICE 2

6 points

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 On considère la surface T d'équation : $x^2 y = z$ avec $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$.
 La figure ci-contre est une représentation de la surface T , dans le cube de centre O et de côté 2.



1. Éléments de symétrie de la surface T .
- a. Montrer que si le point $M(x, y, z)$ appartient à T , alors le point $M'(-x, y, z)$ appartient aussi à T . En déduire un plan de symétrie de T .
- b. Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie de T .
2. Intersections de la surface T avec des plans parallèles aux axes.
- a. Déterminer la nature des courbes d'intersection de T avec les plans parallèles au plan (xOz) .
- b. Déterminer la nature des courbes d'intersection de T avec les plans parallèles au plan (yOz) .

3. Intersections de la surface **T** avec les plans parallèles au plan (xOy) d'équations $z = k$, avec $k \in [0 ; 1]$.
- Déterminer l'intersection de la surface **T** et du plan d'équation $z = 0$.
 - Pour $k > 0$ on note K le point de coordonnées $(0, 0, k)$. Déterminer, dans le repère $(K; \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de la courbe d'intersection de **T** et du plan d'équation $z = k$.
 - Tracer l'allure de cette courbe dans le repère $(K; \vec{i}, \vec{j})$. On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.
4. On note (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface **T**.

$$(D) = M(x, y, z) \in (E) \quad \text{avec} \quad 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1 ; 0 \leq z \leq x^2 y.$$

- Pour $0 < k \leq 1$, le plan d'équation $z = k$ coupe le domaine (D) selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la **question 3. c.**. C'est l'ensemble des points M du cube unité, de coordonnées (x, y, z) tels que $y \geq \frac{k}{x^2}$ et $z = k$.
Calculer en fonction de k l'aire $S(k)$ exprimée en unités d'aire, de cette surface.
- On pose $S(0) = 1$; calculer en unités de volume, le volume V du domaine (D).
On rappelle que $V = \int_0^1 S(k) dk$.

PROBLÈME

9 points

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-2 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x \ln(x+2).$$

On note (\mathcal{C}_f) la courbe représentative de f dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité graphique 4 cm).

I. Étude de la fonction f

- Étude des variations de la dérivée f' .
 - f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' la fonction dérivée seconde. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $] -2 ; +\infty[$.
 - Étudier les variations de f' sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$.
 - Déterminer les limites de f' en -2 et en $+\infty$.
- Étude du signe de $f'(x)$.
 - Montrer que sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$ l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[-0,6 ; -0,5]$.
 - En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
- Étude des variations de f
 - Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$.
 - Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.
 - Dresser le tableau de variation de f .

II. Position de la courbe (\mathcal{C}_f) par rapport à ses tangentes

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $] -2 ; +\infty[$, on appelle T_{x_0} la tangente (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse x_0 .

On note, pour x appartenant à l'intervalle $] -2 ; +\infty[$,

$$d(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)].$$

1. Étude des variations de d .

a. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $] -2 ; +\infty[$,

$$d'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

b. En utilisant la croissance de la fonction f' , donner le signe de $d'(x)$ selon les valeurs de x . En déduire les variations de d sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$.

2. Déterminer la position relative de (\mathcal{C}_f) et de T_{x_0} .

III. Tracés dans le repère $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j})$

1. Déterminer une équation de la droite T_0 , tangente (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse 0; tracer T_0 .
2. Trouver les réels x_0 pour lesquels les tangentes T_{x_0} passent par l'origine du repère puis tracer ces droites.
3. Tracer la courbe (\mathcal{C}_f) pour les valeurs de x comprises entre -1 et 2 . On prendra pour α la valeur $-0,54$ et pour $f(\alpha)$ la valeur $0,8$.