∽ Baccalauréat S Centres étrangers juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

Le directeur d'un musée, dont le plan est fourni ci-dessous, organise une exposition.

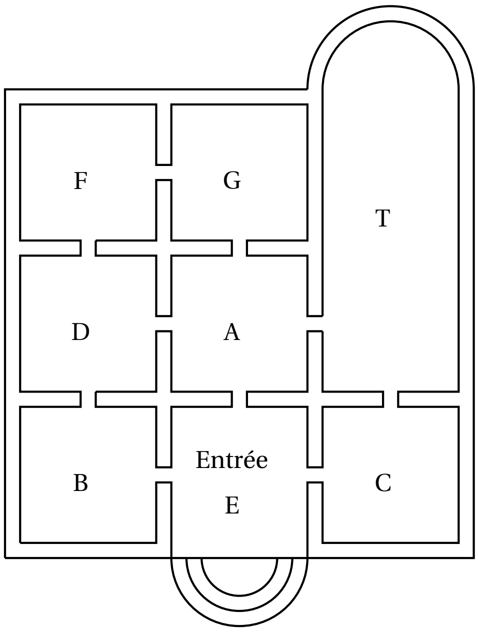
Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard, en faisant les hypothèses suivantes :

- Le visiteur passe *au hasard* d'une salle à une salle voisine.
- Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer.

Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençant par la lettre E.

Par exemple :

- Si le visiteur passe successivement par les salles E, B, D, F, on codera son trajet par le mot EBDF.
- Le trajet codé EBDB est impossible avec les hypothèses choisies.



1. On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses précédentes.

a. Construire l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur.

b. Montrer que la probabilité du parcours codé EBDF est $\frac{1}{6}$.

c. Déterminer la probabilité p_1 de l'évènement : « La quatrième salle du trajet est F ».

d. Pour des raisons techniques, le directeur installe les œuvres les plus intéressantes dans la salle T. Déterminer la probabilité p_2 de l'évènement « Le trajet passe par la salle T ».

2. Le directeur imagine dix visiteurs pris au hasard, effectuant chacun un trajet, de manière indépendante et selon les hypothèses précédentes. On appelle X la variable aléatoire qui, aux dix visiteurs, associe le nombre de leurs trajets passant par la salle T.

a. Calculer la probabilité de l'évènement $(\mathrm{X} = 1)$.

b. Calculer la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T. (Donner le résultat arrondi au millième.)

c. Le directeur décide d'obliger les visiteurs à se diriger, après l'entrée, vers la salle A, les hypothèses précédentes demeurant pour la suite des trajets. Il pense ainsi augmenter la probabilité que deux visiteurs au moins, sur les dix, passent par la salle T.
Prouver qu'il a tort.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité graphique 4 cm), dans lequel on considère les points A (2 ; 0), B (0 ; 2) et C (- 2 ; - 2).

1. Soient a, b et c les nombres définis pour t réel par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & -\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{2}{3}\cos t + \frac{2}{3} \\ b & = & \sin 2t - \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3} \\ c & = & -\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

a. Démontrer que, pour tout réel t, il existe un barycentre, noté $G(t)$, du système de points pondérés {(A, a) ; (B, b) ; (C, c)}.

b. Montrer que, pour tout réel t, les coordonnées du point $G(t)$ sont :

$$x(t) = \cos t \text{ et } y(t) = \frac{3}{2}\sin 2t.$$

Lorsque le paramètre t varie, ce barycentre décrit une courbe (Γ), que l'on se propose d'étudier.

2. Étude des symétries de la courbe (Γ)

a. Étudier les positions relatives des points $G(t)$ et $G(t+2\pi)$.

b. Étudier les positions relatives des points $G(t)$ et $G(-t)$.

c. Étudier les positions relatives des points $G(t)$ et $G(\pi - t)$.

d. Déduire de ce qui précède, en justifiant la démarche, un intervalle d'étude approprié pour les fonctions x et y.

3. a. Étudier le sens de variation de chacune des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et les faire apparaître dans un même tableau.

   b. Placer les points de (Γ) correspondant aux valeurs du paramètre 0, $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ et tracer les tangentes à la courbe (Γ) en ces points.

   c. Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ puis tracer (Γ) complètement. (Hors-programme en 2002)

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1 .

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple $(u\,;\,v)$ est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2. a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\,;\,y_0)$ solution particulière de l'équation (E_2) :
$$35x - 27y = 1.$$

   b. En déduire une solution particulière $(u_0\,;\,v_0)$ de (E_1).

   c. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).

   d. Déterminer la solution $(u\,;\,v)$ permettant de déterminer J_1.

3. a. Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

   b. Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.)

   c. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devrat-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

PROBLÈME — 10 points

Commun à tous les candidats

Les objectifs du problème sont de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle (partie A), d'étudier cette solution (partie B) et de la retrouver dans un contexte différent (partie C).

Partie A

On appelle (E) l'équation différentielle : $y'' - y = 0$, où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Déterminer les réels r tels que la fonction h, définie par $h(x) = \mathrm{e}^{rx}$, soit solu-

tion de (E).

2. Vérifier que les fonctions φ définies par $\varphi(x) = \alpha\mathrm{e}^{x} + \beta\mathrm{e}^{-x}$, où α et β sont deux nombres réels, sont des solutions de (E).
On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E).

3. Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $\left(\ln 2\ ;\ \dfrac{3}{4}\right)$ et admet en ce point une tangente dont le c?fficient directeur est $\dfrac{5}{4}$.

Partie B

On appelle f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit μ un réel. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \mu$ équivaut à $\mathrm{e}^{2x} - 2\mu\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$.
En déduire que l'équation $f(x) = \mu$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa valeur en fonction de μ.

2. **a.** Déterminer les limites de f en - ∞ et en + ∞.

b. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

b. En étudiant le sens de variation de la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - x$, préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (T).

c. Tracer $(\mathscr{C})$ et (T) (unité graphique: 2 cm).

4. Soit D la partie représentant sur le graphique l'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\ x & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right.$$

Calculer, en cm^2 l'aire de D.

Partie C

On cherche à caractériser les fonctions φ, dérivables sur l'ensemble des nombres réels, telles que, pour tout réel x :

$$\varphi(x) - \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = x \quad \text{(H)}.$$

1. On suppose qu'il existe une telle fonction φ.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$\varphi(x) = x + x\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer $\varphi(0)$.

b. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $\varphi'(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
Calculer $\varphi'(0)$

c. Vérifier que φ est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie **A**.
Déterminer laquelle, parmi toutes les solutions explicitées dans la question **A) 2**.

2. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^x t\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t$.

b. Démontrer que la fonction trouvée à la question **1. c.** vérifie bien la relation (H).