TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES/ARITHMETIQUE

Exercice 1

Partie A :

(Equation diophantienne et PGCD)

On considère Léquation (1) d'inconnue (n,m) éléments de $\mathbb{Z}$: $11n - 24m = 1$ (1).

1. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
2. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (1).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

Partie B :

(Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

1. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
2. (n,m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$.
3. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$
4. Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$.
5. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.
6. Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

Exercice 2

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = 2^n - 1$

1. Calculer U_n pour n prenant les valeurs : 2, 3, 5, 7, 11. Ces nombres sont -ils premiers ?
2. Justifier que si p et q sont des entiers naturels non nuls, $2^p \equiv 1(2^p - 1)$ et $2^{pq} \equiv 1(2^p - 1)$
3. En déduire que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et $2^q - 1$.
4. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier. La réciproque est -elle vraie.

Exercice 3

1. Déterminer, s'ils existent, les couples d'entiers naturels (n,p) vérifiant les conditions suivantes :
   a. $n + p = 11994$
   b. PGCD(n,p)=1999.
2. Soit (E) l'équation $n^2 - Sn + 11994 = 0$ dont l'inconnue n appartient à $\mathbb{N}$ et où S représente un entier naturel.
   a. Peut - on déterminer S lorsque 3 est solution de (E) ? Dans l'affirmative, préciser la deuxième solution
   b. Peut - on déterminer S lorsque 5 est solution de (E) ?
   c. Déterminer alors les valeurs possibles de S tels que (E) admette deux solutions entières.