PREPARATION AU BACCALAURÉAT 2013/ Par M NKEUNA

Exercice 1

Dans le plan affine rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$,
on considère les points $F(0{,}4)$ et $D\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$. On note (Δ) la droite passant par D et parallèle à l'axe des abscisses ;
Γ la conique dont les points vérifient : $\dfrac{d(M,F)}{d(M,(\Delta))} = 2$.

1. Préciser la nature de Γ et déterminer son excentricité, un de ses foyers et la directrice associée à ce foyer.
2. a. Démontrer qu'une equation cartésienne de Γ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est $x^2 - 3y^2 + 4y + 7 = 0$
   b. En déduire l'équation réduite de Γ. Tracer cette conique.

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $50x - 11y = 3$ (E).

1. a. Quelles sont les valeurs possibles du PGCD du couple (x,y) solution de (E).
   b. Résoudre l'équation (E)
2. Soit n un entier naturel non nul. On pose $a = 11n + 3$ et $b = 13n - 1$.
   a. Montrer que tout diviseur de a et de b est un diviseur de 50.
   b. En s'inspirant de la question 1-b, déterminer les valeurs de n pour lesquelles le PGCD de a et b est égale à 50.
   c. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le PGCD de a et b est égale à 25.

Exercice 3

Dans le plan complexe $\wp$ rapporté au repère orthonormal direct $(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, unité graphique 1cm, on considère las points B et D définis par $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{v}$, et C tel que $ABCD$ soit un rectangle.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Déterminer l'affixe z_E de E.
2. Déterminer les nombres réel a et b tels que le point F d'affixe $z_F = 6 - i$ soit le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients a, b et 1.
3. On considère la similitude s qui transforme A en E et B en F. A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z', image de M par s.
   a. Exprimez z' en fonction de z.
   b. Déterminer le centre I, l'angle et le rapport de la similitude s.
   c. Déterminer les images de C et D par s.
   d. Calculer l'aire de l'image par s du rectangle $ABCD$
4. a. Déterminer l'ensemble Ω des points M du plan tels que $\|6\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 9$
   b. Déterminer, en précisant ses éléments caractéristiques, l'image de Ω par s.

Problème

Partie A :

Soit θ un nombre réel tel que :$0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $Z^2\cos^2\theta - 2Z\sin\theta\cos\theta + 1 = 0$

   b. Déterminer le module et un argument des solutions éventuelles de cette équation.

2. Résoudre l'équation différentielle : $(1+\cos 2\theta)y'' - (2\sin 2\theta)y' + 2y = 0$

Partie B :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{lnt}{1+t^2}dt$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. a. Justifier que f est définie et dérivable sur $]0, +\infty]$ et calculer $f'(x)$.

   b. En déduire le sens de variation de f.

2. a. Pour $x > 0$, calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{lnt}{t^2}dt$

   b. Démontrer que pour tout $t > 1$, $\dfrac{lnt}{2t^2} \leqslant \dfrac{lnt}{1+t^2} \leqslant \dfrac{lnt}{t^2}$

   c. En déduire que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{lnx}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{lnx}{x}\right)$

   d. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ Donner un encadrement de l.

3. soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   a. Démontrer que g est une fonction nulle sur $]0, +\infty[$

   b. En déduire la limite de f en 0.

   c. tracer (C)

Partie C :

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n = \displaystyle\int_0^1 x^n ln(1+x)dx$

1. a. Démontrer que $0 \leqslant U_n \leqslant \dfrac{ln2}{n+1}$

   b. En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

   c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

   d. Calculer U_n en fonction de n.

2. pour tout x de [0,1] et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose $s_n = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n$.

   a. Démontrer que $s_n = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$

   b. Démontrer que $1 - \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n+1} = ln2 - (-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$

   c. Démontrer que $u_n = \dfrac{ln2}{n+1} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left\{ln2 - \left[1 - \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right]\right\}$

   d. En déduire la valeur exacte de u_2.

   e. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$