PREPARATION AU BACCALAURÉAT C 2013/ Par M NKEUNA

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 6 points

Partie A :

On considère l'expression $f_{xy} = (x-y)(x+y)$ avec $x,y \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que f_{xy} est pair si x et y sont de même parité. 0.5pt
2. Montrer que le produit de deux nombres impairs est impair. 0.5pt

Partie B :

On désigne par P l'ensemble des entiers naturels premiers.

on se propose de résoudre dans P^2 l'équation (E) : $x^2 - y^2 = pq$. Où p et q sont deux entiers naturels premiers.

1. Étudier le cas où $p = q = 2$($i.e$ *voir si on peut avoir de solution*) 0.75pt
2. Étudier le cas où $q = 2$ et $p > 2$. 0.75pt
3. a. On suppose que : $2 < q \leqslant p$.
   i. Quel est la parité de pq ? 0.25pt
   ii. Démontrer que y est nécessairement égal à 2. 0.5pt
   iii. En déduire que si $p - q \neq 4$, alors (E) n'a pas de solution. 0.5pt

   b. On suppose que $p - q = 4$.
   i. Démontrer que si $(x,2)$ est solution de (E), alors les nombres q, x et p forment une suite arithmétique de raison 2. 0.75pt
   ii. Montrer que pour tout entier n, l'un des trois nombres n, $n+2$ et $n+4$ est divisible par 3. 0.5pt
   iii. En déduire que (E) n'a de solution que si $q = 3$ et $p = 7$. 0.5pt
   iv. Quelle est la solution de (E) dans ce cas ? 0.5pt

Exercice 2 — 3 points

Soit ABC un triangle, G le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,2)$ et $(C,2)$. Les droites $(BG$ et (CG) coupent (AC) et (AB) respectivement en B' et C'.

1. En utilisant le barycentre partiel, démontrer que :
   a. $2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB'} = \overrightarrow{0}$ 1pt
   b. $2\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{0}$ 1pt
2. En déduire que les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles. 1pt

Problème **11 points**

Partie A :

On considère l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soient les points $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$, $C(6;-2;-1)$; $D(0;4;-1)$.

1. Déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B, et C sont trois points non alignés. 1pt

2. a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A. 0.5pt

   b. Écrire une équation cartésienne du plan (P_1) orthogonale à la droite (AC) et passant par A. 0.5pt

   c. Vérifier que le plan (P_2) d'équation $x+y+z-3=0$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par A. 0.5pt

3. a. Écrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et de rayon R$=5\sqrt{3}$. 0.5pt

   b. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $L=(S)\cap(P_2)$. 1pt

4. a. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$. En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC). 1pt

   b. On rappelle que le volume du tétraèdre $ABCD$ est $V=\dfrac{1}{3}aire(ABC)\times AD$.
   Déterminer alors ce volume. 0.5pt

Partie B :

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{4}\sqrt{|-x^2+4x+12|}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormée.

1. Déterminer le domaine de définition de f. 0.5pt
2. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 2×0.25pt
3. C_f admet-elle de branches infinies ? si oui, déterminer leurs équations. 1pt
4. Exprimer $f(x)$ sans barres de valeur absolue. 0.5pt
5. Étudier la dérivabilité de f en -2 et en 6. 1pt
6. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations. 1.5pt
7. Construire avec soins C_f en faisant ressortir : 1pt
   - les demi-tangentes en -2 et en 6
   - les branches infinies
   - les extréma