Ministere des Enseignements Secondaires
Delegation régionale du Littoral
DOUALA MATHEMATICS SOCIETY

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ANNÉE SCOLAIRE 2012-2013
Durée : 4h
SERIE C

PREPARATION AU BACCALAUREAT 2013/ PAR M NKEUNA

Exercice 1

1. a. Dresser la liste des diviseurs de 496

   b. Faites la somme de ces diviseurs. Que constate t- on ?
2. Soit p un nombre premier. Comment appelle t-on les nombres de la forme $2^p - 1$?
3. Soit n un entier naturel tel que $2^n - 1$ soit premier. on pose $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$

   a. Quel est le nombre de diviseurs positifs de N ?

   b. Démontrer que la somme des diviseurs de N est $2N$.

Exercice 2

Dans le plan rapporté à un repere orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, (D) désigne la droite d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ et F le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

1. a. Donner une équation cartésienne de la parabole (P) de foyer F et de directrice (D).

   b. Tracer (P)
2. On note A le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$, A' le projeté orthogonal de A sur (D) et (Δ) la tangente à (P) en A.

   a. Écrire une équation cartésienne de (Δ).

   b. Démontrer que (Δ) est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AF})$
3. a. Préciser la nature du triangle $AA'F$

   b. En déduire que les points F et A' sont symétriques par rapport à (Δ)

Exercice 3

On donne dans le plan complexe, les 4 points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -2 + 6i$; $z_B = 1 - 3i$; $z_C = 5 + 5i$; $z_D = 2 + 4i$

1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude S qui transforme C en D et A en B.
2. On considère la similitude S' définie par $z' = 2iz + 13 + i$. Montrer que la composée $S' \circ S$ est une homothétie H dont on précisera le rapport. Quel est le transformé de C par H ?
3. montrer que la transformation R définie par : $z \mapsto iz + 2 + 4i$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle. Quel est le transformé de B par cette rotation. ?
4. Montrer, sans calcul que la transformation $R \circ H$ admet le point C pour point invariant.

Problème

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note ζ la courbe representative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$. unité 5cm

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2}{x^2+1}$.

1. a. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, on a $g'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$

   b. Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

3. a. Dresser le tableau de variation de g.

   b. En déduire dur l'équation $g(x) = 0$, admet une solution unique α et que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

1. a. Démontrer que, pour tout x élément de $]0;+\infty[$, on $f'(x) = g(x)$

   b. En déduire le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$

2. On pose $k(x) = xf(x)$

   a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$

   b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3. a. Démontrer que f est continue à droite en 0.

   b. Étudier la dérivabilité à droite en 0. Donner une interpretation géometrique du résultat obtenu.

4. a. Dresser le tableau de variation de f.

   b. Donner l'allure de la courbe ζ. On prendra $f(\alpha) \simeq 0{,}805$

5. Soit λ un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$

   a. En utilisant une intégration par parties, calculer $J_\lambda = \displaystyle\int_\lambda^1 f(x)dx$

   b. Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine délimité par la courbe ζ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

   c. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to 0} A(\lambda)$.