PREPARATION AU BACCALAUREAT 2010/ PAR M NKEUNA
EPREUVE N°5

Exercice 1

$ABCD$ est un tétraèdre, I et J sont les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$ K et L sont les points tels que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

1. Montrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en un point G que l'on déterminera. Que peut on en conclure.
2. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$
3. On suppose pour cette question que le tétraèdre $ABCD$ est régulier d'arrête a et que O est le centre du triangle BCD
   a. Montrer que la droite (AD) est orthogonale au plan (BCI).
   b. En déduire que la droite (BC) est orthogonale à la droite (AD).
   c. Déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

Exercice 2

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_{n-1} \end{cases}$ et $\begin{cases} y_0 = 3 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$

1. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel, $x_n = 2^{n+1} + 1$
   b. Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4}
   c. En déduire les valeurs de n pour lesquelles x_n est divisible par 5.
2. a. Calculer $PGCD(x_{2004}, x_{2005})$
   b. x_n et x_{n+1} sont - ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?
3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$, puis déduire l'expression de y_n en fonction de n.
   b. Etudier suivant les valeurs de l'entier p, le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.
   c. On note $d_n = PCGD(x_n, y_n)$. Démontrer que $d_n \in \{1,5\}$ et en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice 3

On se propose de rechercher les fonctions y de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ deux fois dérivables,
telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait : $y'' - 7y' + 12y = e^{3x}$ (E)

1. Déterminer le réel a tel que $f_0 : x \mapsto f_0(x) = axe^{3x}$ soit solution de (E)
2. Montrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g - f_0$ est solution de $(E') : y'' - 7y' + 12y = 0$:
3. Resoudre (E') et en déduire la solution de (E).
4. Déterminer la solution g de (E) vérifiant $g(0) = -1$ et $g'(0) = -1$

Problème

Partie A :

1. Déterminer l'ensemble ξ des points M du plan dont f'affixe z vérifie $5z\overline{z} + (z + \overline{z} + 1)^2 = 1$
2. Soit f la composée de l'homothétie de centre O et de rapport 2 et de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'équation de l'image ξ' de ξ par f
3. Montrer que ξ' est une ellipse de foyers $F_1 = f(F)$ et $F_1' = f(F')$

Partie B :

Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = e^x - x^2 - x - 1$, g la fonction définie par $g(x) = \ln(x^2 + x + 1)$. On pose $u_{n+1} = g(u_n)$ et $u_0 = 2$.

1. Montrer que F est dérivable est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, calculer $F'(x)$ et montrer qu'il existe un et un seul réel $\alpha \in]0, +\infty[$ tels que $F'(\alpha) = 0$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$,$e^{-x^4} \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t} dt \leqslant F(x) \leqslant e^{-x^2} \int_x^{x^2} \frac{1}{t} dt$ et en déduire la limite de F en $+\infty$ et en 0^+
3. Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de C_F dans un repère orthonormé.
4. Justifier que $f(x) = 0$ a une et une seule solution $x_0 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $g(x) = x$
6. Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $|g'(x)| \leqslant \frac{16}{19}$ pour $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_0| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{16}{19}\right)^n$
8. Trouver n pour obtenir une valeur approchée de x_0 à 10^{-3} près.