

DEVOIR SURVEILLÉ N°1 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / SEPTEMBRE 2008

NB : La qualité de la rédaction et la clarté de la copie seront prises en compte dans l'évaluation de la copie .

Exercice 1 [10pts]

1. Résoudre par la méthode du Pivot de Gauss le système suivant dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \\ x + y + z = 100 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

3 pts

2. Une ferme spécialisée dans la production des lapins désire produire des lapins de couleur noire, blanche et grise. La production d'un lapin nécessite 5 mois de travail pour le noir, 3 mois pour le blanc et $\frac{1}{3}$ de mois pour le gris.

La ferme produit 100 lapins pendant 100 mois de travail, le nombre de lapins blancs étant le tiers du nombre de lapins noirs.

Déterminer les équations traduisant :

- (a) la contrainte sur le temps ; 2.5pts
 (b) la contrainte sur la production. 2.5pts

3. Parmi ces 100 lapins, combien sont de chaque couleur ? 2pts

Exercice 2 [10pts]

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

(a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 2.5pts

(b) $\sum_{i=1}^n i(n-i) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$ 3pts

(c) $n! \geq 2^{n-1}$ 2.5pts

2. Démontrer que si $n \in \mathbb{N}$, alors $n(n+1)(17n+1)$ est divisible par 2. 2pts