GROUPE LANKÉ DIPITO FORMATION
Enseignement de Base, Secondaire Général
Technique Industriel et Commercial **1er** et **2e** Cycles
Ngousso / Nkolmesseng / Nkomo / Rue Manguiers
BP. 542 Yaoundé Tél : 22 21 52 72 / 22 21 35 93

COLLÈGE IPLEX ÉDUCATION E.S.G
ANNÉE SCOLAIRE 2008-2009
Classe **T**le D Coef : 4 Durée : 4 h
Prof : M. Loumsia A.

SÉQUENCE N°1 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / OCTOBRE 2008

Les calculatrices sont autorisées. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [4pts]

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant (*On utilisera la méthode du pivot de Gauss*) :

$$\begin{cases} 15x+25y+20z &= 6075 \\ y-z &= 15 \\ x+y+z &= 300 \end{cases}.$$

2pts

2. Un libraire affiche les prix par feuille suivants : Mathématiques : 25 francs ; Physique : 20 francs et Anglais :15 francs. Un élève de la terminale D dépense au total 6075 francs pour acheter trois livres à savoir : un livre de mathématiques, un livre de physique et un livre d'anglais. Sachant que le livre de mathématiques a 15 feuilles de plus que le livre de physique et que la somme totale des feuilles constituant ces 3 livres est de 600 pages.
   (a) Déterminer le système qui traduit les contraintes de ce problème. 1pt
   (b) En déduire le nombres de feuilles de chaque livre. 1pt

Exercice 2 [5pts]

Démontrer par récurrence sur l'entier n que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est un multiple de 6. 1pt
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ 1pt
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17. 1pt
4. $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $(1+\sqrt{3})^n \geq 1 + n\sqrt{3}$ 1pt
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(n-i) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$ 1pt

Problème (11 points)

Partie A (7.5 points)

On considère le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Dans tout l'exercice, $\mathcal{P}\backslash\{\text{O}\}$ désigne le plan $\mathcal{P}$ privé du point origine O.

Rappel :

- Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près et $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)$ =-$\arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
- Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w}}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif

1. **Question de cours**
   (a) Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que
   $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif. 1pt
   (b) Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives $a,\ b,\ c$, on a : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif. 1pt
2. On considère l'application f de $\mathcal{P}\backslash\{\mathrm{O}\}$ dans $\mathcal{P}\backslash\{\mathrm{O}\}$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{1}{\overline{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.
   (a) Démontrer que pour $z \neq 0$, on a $\arg(z') = \arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif. 1pt
   En déduire que, pour tout point M de $\mathcal{P}\backslash\{\mathrm{O}\}$ les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O. 1pt
   (b) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{P}\backslash\{\mathrm{O}\}$ tels que $f(M) = M$. 0.5pt
   (c) M est un point du plan $\mathcal{P}$ distinct de O, U et V, on admet que M' est aussi distinct de O, U et V.
   Établir l'égalité $\frac{z'-1}{z'-\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+\mathrm{i}}\right) = -\mathrm{i}\overline{\left(\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)}$. 1pt
   En déduire une relation entre $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-\mathrm{i}}\right)$ et $\arg\left(\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)$ 0.5pt
3. (a) Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq \mathrm{i}$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}$ est un nombre réel non nul. 0.5pt
   (b) Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V. 1pt

Partie B (3.5 points)

1. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :
$$\begin{cases} z_0 = i \\ \text{et } z_{n+1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$$
. On désigne par M_n le point image de z_n dans le plan complexe d'origine O.
   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$. 2pts
   (b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels Mn appartient à la demi-droite $[Ox)$. 1.5pt