BACCALAURÉAT BLANC / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 **4,5pts**

Le candidat traitera soit la partie A soit la partie B de cet exercice.

Partie A :

Soit (U_n) une suite à termes positifs telle que $U_1 = 1$ et $(U_{n+1})^2 = 2U_n$ pour $n > 0$.

1. Calculer U_2, U_3, U_4 (on donnera les résultats sous la forme 2^r, r étant rationnel)
2. On pose, pour tout $n > 0$, $V_n = \ln(U_n) - \ln 2$.
   a. Montrer que la suite V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison
   b. Exprimer V_n en fonction de n. Calculer la limite de (V_n) puis celle de (U_n).
3. On désigne par S_p la somme des p premiers termes de la suite (V_n) et par S'_p le produit des p premiers termes de la suite (U_n).
   a. Calculer S_p et S'_p.
   b. Déterminer les limites de S_p et S'_p.

Partie B :

Soit (F) la famille des fonctions numériques d'une variable réelle f qui vérifient : $(E) : (e^x + 1)f'(x) = 2e^x f(x)$.

1. a. La fonction g d'expression $g(x) = 2x + 3$ est-elle de la famille (F)
   b. A partir de la relation (E), calculer $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, en déduire la forme générale de $f(x)$
2. a. Pour quelle valeur de a la fonction f d'expression $f(x) = e^{ax+b}$ est-elle solution de l'équation différentielle $3f' + 2f = 0$.
   b. Déterminer la solution générale de l'équation $3f' + 2f = 4$.

Exercice 2 **5pts**

Partie A :

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2 + 2i$, $-2i$, $2i$.

1. Déterminer la transformation complexe associé à la similitude plane directe S définie par : S(O)=B, S(A)=C.
2. On définit dans $\mathbb{C}$ l'application f par $f(z) = (1 + i)z - 2i$.
   a. Donner la nature de f et ses éléments caractéristiques.
   b. Déterminer le point D tel que f(D)=O.
   c. Soit (C) le cercle de centre E(1,2) et de rayon 1 et (c') l'image de (C) par la transformation f.
      i. Donner les coordonnées de F centre de (C') et son rayon R'
      ii. construire (C) et (C').

Partie B :

Soit α un réel positif. On pose $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt$.

1. a. Exprimer $I(\alpha)$ en fonction de α.

   b. Déterminer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers 0.

2. On pose $J(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} dt$.

   a. En utilisant une intégration par parties, exprime $J(\alpha)$ en fonction de α et de $I(\alpha)$, puis en fonction de α.

   b. Déterminer la limite de $J(\alpha)$ quand α tend vers 0.

Problème **10pts**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$)unité 2 cm.

Soit f et g les fonctions de $I =]-1; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{2\ln(x+1)}{x+1}$ et $g(x) = (x+1)^2 + 2 - 2\ln(x+1)$.

1. a. Étudier les variations de g

   b. Quel est le signe de g ?

2. Étudier les variations de f.

3. montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) représentative de f dans un repère (O, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$). Étudier la position de (C) par rapport à (D).

4. Déterminer la tangente (T) à (C) à l'origine.

5. Montrer qu'il existe un point A unique de (C) où (C) admet une tangente (T') parallèle à (D). déterminer les coordonnées de A.

6. Tracer (C), (D), (T) et (T').

7. Justifier le fait que f est une bijection de I sur un intervalle que l'on déterminera. En déduire que f admet une bijection réciproque f^{-1} et indiquer le tableau de variation de f^{-1}.

8. a. Définir une primitive sur I de la fonction h définie pour tout x de I par $h(x) = (x+1)\ln(x+1)$. En déduire une primitive de f sur I.

   b. Calculer l'aire du domaine du plan, ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient :
   $$\begin{cases} 0 \le x \le -1 + e \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$$

Partie B :

Une boîte contient quatre boules rouges, trois boules vertes et n boules jaunes. n est un nombre entier supérieur ou égal à 2. On tire simultanément deux boules de la boîtes et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Calculer, en fonction de n, les probabilités $p(A)$ et $p(B)$ des événements : A :"Obtenir deux boules de même couleur" , B :"obtenir deux boules différentes"

2. on suppose que la probabilité d'obtenir jaunes vaut $\frac{3}{13}$. Déterminer n, puis $p(A)$ et $p(B)$

3. Dans cette question, n vaut 7. On répète dix fois l'expérience en remettant dans la boîte, après chaque tirage, les deux boules tirées.
   Soit X le nombre de fois où l'événement A est réalisé au cours de ces répétition. Déterminer la loi de probabilité de X.