BACALAUREAT BLANC/ ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / MAI 2009

L'épreuve comporte 3 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 4pts

Partie A :

On jette un dé cubique parfait.

1. Les événements « Sortir 1,2,3 ou 4» et «Sortir 4 ou 5» sont t-il indépendants ? incompatibles ? 1pt
2. Les événements « Sortir 1,2,3 ou 4» et « Sortir 5 ou 6» sont-il indépendants ? incompatibles ? 1pt

Partie B :

Le tiers d'une population P a été vacciné contre la grippe. On constate qu'il y a parmi les malades, 25% de vacciné. On sait aussi qu'il y a parmi les vaccinés, 8% de malades.

1. Représenter cette situation sous forme d'arbre de probabilité et de tableaux. 1pt
2. Calculer la probabilité d'attraper la grippe pour un individu non vacciné 1pt

Exercice 2 — 4 pts

Pour dater les ossements d'animaux préhistoriques, on utilise couramment la méthode dite du «carbone 14». On admet que tant que l'animal est vivant, la quantité de carbone 14 dans son organisme est constante et qu'elle est égale à 100. Après sa mort, la quantité de carbone 14 dans son corps s'amenuise progressivement. On donne le tableau suivant :

Quantité restante de carbone 14 : q_i	48	30	23	16	11
Age des ossements (En milliers d'années)	6	10	12	15	18

1. On pose $x_i = \ln q_i$ où ln désigne le logarithme décimal. Placer dans un tableau la série des (x_i,y_i), en prenant pour x_i la valeur approchée à 0,001 près par défaut. 0.5pt
2. Représenter le nuage de points de cette série dans un repère orthogonal.(unité 2 cm sur l'axe des abscisses ; 0,5 cm sur l'axe des ordonnées). 1 pt
3. Calculer les coordonnées du point moyen de ce nuage. 0.5pt
4. Effectuer un ajustement de ce nuage par la méthode des moindres carrés . 1 pt
5. On a mis à jour des ossements dont la teneur en carbone 14 est 40. A partir de l'équation de la droite (Δ) obtenue à la question 4, estimer à 500 ans près l'age de ces ossements. 1 pt

Exercice 3 — 2pts

1. Montrer que $\dfrac{1-u^2}{1-2u} = \dfrac{1}{2}u - \dfrac{3}{8u-4} + \dfrac{1}{4}$. 1pt
2. En déduire le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx$. 1pt

Problème **10pts**

Ce problème comporte trois parties. Les partie B et C ne sont pas indépendantes.

Partie A :

On désire résoudre l'équation $z^4 + 7 + 24i = 0$ (E).

1. Soit $z_0 = 2 - i$. Montrer que l'équation est équivalente à $z^4 - z_0^4 = 0$. 0,5 pt
2. Écrire $z^4 - z_0^4$ sous la forme d'un produit de quatre polynômes de degré 1 et en déduire les solutions de (E). 1pt
3. Montrer que les images des solutions, dans le plan complexe, sont les sommets d'un carré. 0,5 pt

Partie B :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(x^2) + \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{x^2}$

1. Déterminer les limites de g en 0 et en ∞. 1 pt
2. a. Soit g' la dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$. 0,5 pt
   b. Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation. 1 pt
3. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α. 0,5 pt
   b. Justifier l'encadrement $0{,}1 < \alpha < 1$. 0,5 pt
   c. Donner une valeur approchée décimale à 10^{-2} par excès de α. 0,5 pt
4. Déduire de l'étude précédente le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie C :

On considère la fonction numérique f, définie sur $]0, +\infty[$ par :$f(x) = e^x \left[\ln(x^2) + \dfrac{2}{x}\right]$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$. 0,5 pt
   b. Déterminer la limite de f en 0. 0,5 pt
2. a. Calculer la dérivée de f. 0,5 pt
   b. Déterminer en utilisant la partie B, le sens de variation de f. 0,5 pt
3. Construire avec soin, sur papier millimétré, dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ la courbe representative de la fonction f en prenant comme unités 4 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées. 1 pt
4. a. Calculer la dérivée de la fonction numérique h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^x \ln(x^2)$. 0,5 pt
   b. En déduire les primitives de la fonction f. 0,5 pt