

BACALAUREAT BLANC/ ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / MAI 2009

L'épreuve comporte 3 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 4pts

Partie A :

On jette un dé cubique parfait.

1. Les événements « Sortir 1,2,3 ou 4 » et « Sortir 4 ou 5 » sont-ils indépendants ? incompatibles ? 1pt
2. Les événements « Sortir 1,2,3 ou 4 » et « Sortir 5 ou 6 » sont-ils indépendants ? incompatibles ? 1pt

Partie B :

Le tiers d'une population P a été vacciné contre la grippe. On constate qu'il y a parmi les malades, 25% de vaccinés. On sait aussi qu'il y a parmi les vaccinés, 8% de malades.

1. Représenter cette situation sous forme d'arbre de probabilité et de tableaux. 1pt
2. Calculer la probabilité d'attraper la grippe pour un individu non vacciné 1pt

Exercice 2 4 pts

Pour dater les ossements d'animaux préhistoriques, on utilise couramment la méthode dite du « carbone 14 ». On admet que tant que l'animal est vivant, la quantité de carbone 14 dans son organisme est constante et qu'elle est égale à 100. Après sa mort, la quantité de carbone 14 dans son corps s'amenuise progressivement. On donne le tableau suivant :

Quantité restante de carbone 14 : q_i	48	30	23	16	11
Age des ossements (En milliers d'années)	6	10	12	15	18

1. On pose $x_i = \ln q_i$ où \ln désigne le logarithme décimal. Placer dans un tableau la série des (x_i, y_i) , en prenant pour x_i la valeur approchée à 0,001 près par défaut. 0.5pt
2. Représenter le nuage de points de cette série dans un repère orthogonal. (unité 2 cm sur l'axe des abscisses ; 0,5 cm sur l'axe des ordonnées). 1 pt
3. Calculer les coordonnées du point moyen de ce nuage. 0.5pt
4. Effectuer un ajustement de ce nuage par la méthode des moindres carrés. 1 pt
5. On a mis à jour des ossements dont la teneur en carbone 14 est 40. A partir de l'équation de la droite (Δ) obtenue à la question 4, estimer à 500 ans près l'âge de ces ossements. 1 pt

Exercice 3 2pts

1. Montrer que $\frac{1-u^2}{1-2u} = \frac{1}{2}u - \frac{3}{8u-4} + \frac{1}{4}$. 1pt
2. En déduire le calcul de l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x} dx$. 1pt

Problème 10pts

Ce problème comporte trois parties. Les parties B et C ne sont pas indépendantes.

Partie A :

On désire résoudre l'équation $z^4 + 7 + 24i = 0$ (E).

1. Soit $z_0 = 2 - i$. Montrer que l'équation est équivalente à $z^4 - z_0^4 = 0$. 0,5 pt
2. Écrire $z^4 - z_0^4$ sous la forme d'un produit de quatre polynômes de degré 1 et en déduire les solutions de (E). 1pt
3. Montrer que les images des solutions, dans le plan complexe, sont les sommets d'un carré. 0,5 pt

Partie B :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(x^2) + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}$

1. Déterminer les limites de g en 0 et en ∞ . 1 pt
2. a. Soit g' la dérivée de la fonction g . Calculer $g'(x)$. 0,5 pt
b. Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation. 1 pt
3. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α . 0,5 pt
b. Justifier l'encadrement $0,1 < \alpha < 1$. 0,5 pt
c. Donner une valeur approchée décimale à 10^{-2} par excès de α . 0,5 pt
4. Déduire de l'étude précédente le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie C :

On considère la fonction numérique f , définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^x \left[\ln(x^2) + \frac{2}{x} \right]$.

1. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$. 0,5 pt
b. Déterminer la limite de f en 0. 0,5 pt
2. a. Calculer la dérivée de f . 0,5 pt
b. Déterminer en utilisant la partie B, le sens de variation de f . 0,5 pt
3. Construire avec soin, sur papier millimétré, dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative de la fonction f en prenant comme unités 4 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées. 1 pt
4. a. Calculer la dérivée de la fonction numérique h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^x \ln(x^2)$. 0,5 pt
b. En déduire les primitives de la fonction f . 0,5 pt