MINESEC		LYCEE CLASSIQUE D'EDEA	
EXAMEN	MATHEMATIQUES	DEVOIR DE SYNTHESE N° 4	T ^{le} D & T ^{le} TI
COEFF. 4	Prof : T.N. AWONO-MESSI & R. K. NZEMEU	22/02/ 2013	Durée : 4H

L'examineur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation de la copie.

EXERCICE 1 : 5 points

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application S du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + i(1 + \sqrt{3})$

1. (a) Montrer que S est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i . 0,5pt
- (b) Déterminer le rapport et l'angle de S . 0,5pt
- (c) Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = 1$.

Déterminer une équation de $(\mathcal{D}')$, image de $(\mathcal{D})$ par S . 1pt

2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$
Calculer ΩM_0 et donner une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}; \overline{\Omega M_0})$. 0,5pt
3. On considère la suite de points $(M_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = S(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n .
 - (a) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n . 0,5pt
 - (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$ 1pt
 - (c) Calculer ΩM_n puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geq 10^2$. 1pt

EXERCICE 2 : 4 points

On considère : La fonction de la variable réelle x telle que $g(x) = -xe^x + 1$; les équations différentielles $(E_0) : y'' + 2y' - 3y = 0$ et $(E) : y'' + 2y' - 3y = -4e^x - 3$.

1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) + 2g'(x) - 3g(x) = -4e^x - 3$. 0,5pt
2. Résoudre (E_0) . 0,75pt
3. Soit h une fonction numérique de la variable réelle x deux fois dérivable.
 - (a) Démontrer que h est solution de (E) si et seulement si $h - g$ est solution de (E_0) . 1pt
 - (b) En déduire les solutions de (E) . 0,25pt
4. Déterminer la solution u de (E) vérifiant $u(0) = 0$ et $u'(0) = 4$. 0,75pt
5. A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 3x dx$ 0,75pt

PROBLEME : 11 points

Le problème comporte deux parties A et B .

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et l'unité sur chaque axe est 2 cm.

Partie A 3 points

On définit sur $]0; +\infty[$ la fonction numérique f définie par $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1}$

1. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$ où f' est la dérivée de f . **0,5pt**
2. Dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$. **1pt**
3. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$ et $0,5 < \alpha < 0,6$. **0,75pt**
4. En déduire le signe de f sur $]0; +\infty[$. **0,75pt**

Partie B 8 points

On considère la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par
$$\begin{cases} F(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ précédent.

1. Continuité et dérivabilité de F

- (a) Etudier la continuité de F en 0. **0,5pt**
- (b) Etudier la dérivabilité de F en 0 et interpréter graphiquement le résultat. **0,75pt**

2. Variations de F

On admet que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \ln t \leq t - 1$.

- (a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, on a : $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$. **0,75pt**
 - (b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Qu'en conclure ? **0,75pt**
 - (c) Montrer F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$. **0,75pt**
 - (d) Dresser le tableau de variation de F . **0,75pt**
 - (e) Montrer que $F(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$. **0,5pt**
 - (f) Vérifier en utilisant la partie A que $0,8 < F(\alpha) < 0,88$ et en déduire une valeur approchée de $F(\alpha)$ à 10^{-1} près. **0,75pt**
 - (g) Tracer soigneusement la courbe $\mathcal{C}$ avec son asymptote dans le repère. **1pt**
3. On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$, $A_n = \int_1^n f(x) dx$
- Exprimer A_n en fonction de n puis, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$. **1,5pt**