MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA			
04.04.2014	EXAMEN :	DEVOIR DE SYNTHESE N° 5	Durée : 4h	T^{les} D_1 , D_2 ,TI
COEFF. 4	EPREUVE :	MATHEMATIQUES	Prof : T.N. AWONO MESSI	

EXERCICE 1 : 3,5 points

L'objectif de cet exercice est de calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx \ ; J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \ ; K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx.$$

1. Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$.

(a) Calculer la dérivée f' de f. **0,5pt**

(b) Calculer la valeur de I. **0,5pt**

2. **(a)** Sans calculer explicitement J et K, vérifier que : $J+2I=K$. **0,75pt**

(b) En intégrant K par parties, montrer que $K=\sqrt{3}-J$. **0,75pt**

(c) En déduire alors les valeurs de J et de K. **1pt**

EXERCICE 2 : 3,5 points

On considère un dé cubique homogène dont les faces sont numérotées : $0, 0, -1, 1, 1, 1$.

On lance le dé deux fois de suite et on note par a le résultat du premier lancer et par b celui du deuxième. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère la transformation f du plan, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=(a+ib)z+ib$.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « f est une symétrie centrale » ; B : « f est une translation ». **1,5pt**

C : « f est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ ». **0,75pt**

D : « f est une similitude directe de centre $I(-1;0)$ ». **0,75pt**

2. Soit l'événement : $E=D/C$. Montrer que $p(E)=0,75$. **0,5pt**

EXERCICE 3 : 2,5 points

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0=-\dfrac{1}{2} \\ u_n={u_{n-1}}^2+2u_{n-1}, \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}^*. \end{cases}$

1. **(a)** Vérifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*, 1+u_n=\left(1+u_{n-1}\right)^2$. **0,5pt**

(b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N} : u_n>-1$. **0,5pt**

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\ln(1+u_n)$.

(a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera. **0,75pt**

(b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. **0,75pt**

PROBLEME : 10,5 points

Le problème comporte trois parties A,B et C.

PARTIE A : 5,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-|x|} - x + 2$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *(unité graphique : 1cm).*

1. **(a)** Ecrire $f(x)$ sans symbole de valeur absolue. **0,25pt**

   (b) Etudier la continuité de f en 0. **0,5pt**

2. **(a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 2\dfrac{e^{-|x|} - 1}{x} - 1$. **0,5pt**

   (b) f est-elle dérivable en 0? **0,5pt**

3. **(a)** Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$. Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$. **0,5pt**

   (b) Etudier les variations de f. **1pt**

   (a) Construire $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$. *On construira les demi-tangentes au point d'abscisse* 0. **1,25pt**

4. Soit g la restriction de f sur $[0;+\infty[$. On désigne par Γ_1 sa courbe représentative.

   (a) Montrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser. **0,5pt**

   (b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution que l'on encadrera à 10^{-1} près. **0,5pt**

PARTIE B : 2,5 points

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = 1 + x\ln x$. Γ_2 est sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de φ. **1pt**
2. Déterminer le point de rencontre de Γ_2 avec la droite Δ d'équation $y = x$. **0,5pt**
3. Construire la courbe Γ_2. **1pt**

PARTIE C : 2,5 points

On considère la transformation S du plan complexe qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ telle que $z' = \dfrac{1}{2}(1-i)z - 1$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de S. **1pt**
2. Exprimer x' et y' en fonction de x et y. **0,75pt**
3. Déterminer l'image de Γ_1 par S. **0,75pt**