| MINESEC | LYCEE CLASSIQUE D'EDEA | | | |
|---|---|---|---|---|
| 07.04.2016 | EXAMEN : | DEVOIR DE SYNTHESE N° 5 | Durée : 4h | $T^{les}$ $D_1$, $D_2$ ,TI |
| COEFF. 4 | EPREUVE : | MATHEMATIQUES | Prof : T.N.AWONO MESSI | |

*L'épreuve comporte deux exercices et un problème , tous obligatoires, sur trois pages numérotées de 1 à 3. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.*

**EXERCICE 1 : 4,5 points**

On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$ contenant des boules blanches et rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste *à choisir une urne puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.*

On note $A$ l'événement « l'urne $U_1$ est choisie », $B$ l'événement « l'urne $U_2$ est choisie » et $R$ l'événement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

**1.** Dans cette question, l'urne $U_1$ contient une boule rouge et $4$ boules blanches, l'urne $U_2$ contient $4$ boules rouges et $2$ boules blanches.

**(a)** Déterminer les probabilités suivantes : $p(A),\ p_A(R),\ p(A\cap R)$. **0,75pt**

**(b)** Montrer que $p(R)=\dfrac{13}{30}$. **0,75pt**

**(c)** Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne $U_1$ ? **0,75pt**

**2.** Soit $n\in\mathbb{N}(n\leq 5)$. On suppose que l'urne $U_1$ contient $4$ boules blanches et $n$ boules rouges, l'urne $U_2$ contient $2$ boules blanches et $5-n$ boules rouges.

**(a)** Exprimer $p_A(R)$ et $p_B(R)$ en fonction de $n$. **0,5pt**

**(b)** Démontrer que $p(R)=\dfrac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}$. **1pt**

**3.** On sait que $n$ ne prend que $6$ valeurs entières.

Déterminer la répartition des $5$ boules rouges entre les urnes $U_1$ et $U_2$ donnant la plus grande valeur possible de $p(R)$. **0,75pt**

**EXERCICE 2 : 5 points**

On considère la fonction polynôme $P$ à variable complexe $z$ définie par :

$P(z)=z^3+3z^2-3z-5-20i.$

**1. (a)** Démontrer que $2+i$ est une racine de $P$. **0,25pt**

**(b)** En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $P(z)=0$. **1pt**

**2.** Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A, B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A=2+i, z_B=-1-2i$ et $z_C=-4+i$.

**(a)** Placer les points $A, B$ et $C$ puis calculer les distances $AB$ et $BC$. **0,75pt**

**(b)** Démontrer que $\arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)[2\pi]$. **0,25pt**

**(c)** En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$. **0,25pt**

**(d)** Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle $ABC$. **0,25pt**

**3.** Soit $r$ la rotation qui laisse invariant le point $B$ et qui transforme $A$ en $C$.

**(a)** Montrer que l'écriture complexe de $r$ est $z' = iz - 3 - i$. **0,5pt**

**(b)** Préciser les éléments géométriques de $r$. **0,25pt**

**4.** Soit $h$ la transformation du plan $\mathscr{P}$ d'écriture complexe $z' = i\alpha^2 z + \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$.

**(a)** Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $h$ est une homothétie de rapport $2$. **0,5pt**

**(b)** On suppose dans cette question que $\alpha = 1 - i$ et on pose $S = r \circ h$.

Déterminer l'écriture complexe, puis la nature et les éléments géométriques de $S$. **1pt**

**PROBLEME : 10,5 points**

*Le problème comporte trois parties indépendantes A, B et C*

**PARTIE A : 5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique $2cm$.

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \lambda x^2 e^{-x}$, les équations différentielles $(E_0): y'' + 2y' + y = 0$ et $(E): y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

**1.** Déterminer le réel $\lambda$ pour que $g$ soit solution de $(E)$. **0,5pt**

**2.** Montrer qu'une fonction $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de $(E_0)$. **0,5pt**

**3.** Résoudre l'équation $(E_0)$ et en déduire les solutions de $(E)$. **0,75pt**

**4.** Déterminer la fonction $h$, solution de $(E)$ dont la courbe passe par $A(-1;0)$ et admet en ce point une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$. **0,75pt**

**5.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

**(a)** Etudier les variations de $f$ et construire la courbe $C_f$. **1,5pt**

**(b)** Déterminer en $cm^2$ l'aire du domaine $\mathscr{D}$ défini par les points $M(x, y)$ du plan tels que : $0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$. **1pt**

**PARTIE B : 3,5 points**

On considère la suite $(U_n)$ définie par $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = \dfrac{3U_n}{1 + 2U_n}$.

**1. (a)** Calculer $U_1$ et $U_2$. **0,25pt**

**(b)** Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n$. **0,5pt**

**2.** On admet que pour tout entier naturel $n, U_n < 1$.

**(a)** Démontrer que la suite $(U_n)$ est croissante. **0,5pt**

**(b)** Démontrer que la suite $(U_n)$ est convergente. **0,25pt**

**3.** Soit $(V_n)$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $V_n = \dfrac{U_n}{1-U_n}$.

**(a)** Montrer que la suite $(V_n)$ est une suite géométrique de raison $3$. **0,5pt**

**(b)** Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}, V_n$ en fonction de $n$ et en déduire que $U_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$. **1pt**

**(c)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. **0,5pt**

**PARTIE C : 2 points**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx.$

**1.** Calculer $I_0$ et $J_0$. **0,5pt**

**2.** En intégrant $I_n$ et $J_n$ par parties, montrer que $I_n + nJ_n = 1$ et $J_n - nI_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$. **1pt**

**3.** En déduire alors $I_n$ et $J_n$. **0,5pt**