GROUPE LANKÉ DIPITO FORMATION
Enseignement de Base, Secondaire Général
Technique Industriel et Commercial **1^er^** et **2^e^** Cycles
Ngousso / Nkolmesseng / Rue Manguiers
BP. 542 Yaoundé Tél : 22 21 52 72 / 22 21 35 93
www.doualamaths.net

COLLÈGE IPLEX ÉDUCATION E.S.G
ANNÉE SCOLAIRE 2008-2009
Classe $\mathbf{T}^{\text{le}}$ D Coef : 4 Durée : 4 h
Prof : M. Loumsia A.

SÉQUENCE N°2 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / NOVEMBRE 2008

Les calculatrices sont autorisées. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [6pts]

Partie A Soit la fonction numérique $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.

1. Préciser l'ensemble de définition Df de f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 1.5pt
2. On considère la fonction $g : x \mapsto (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}) \sin(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$
   (a) Justifier que : $\forall x \in Df,\ g(x) = 2\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}$. 0.5pt
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. 0.5pt
   (c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x \sin(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})\right]$. 1.5pt

Partie B Soit a et b deux nombres réels, f la fonction définie par : $f(x) = ax + b - \sqrt{x^2+1}$.

1. Étudier la limite de f en $-\infty$.(*On discutera suivant les valeurs de* a) 1pt
2. Déterminer a et b pour que la droite d'équation $2x - y + 2 = 0$ soit asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$. 1pt

Exercice 2 [4.5pts]

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique : 4 cm). Soit Ω le point d'affixe 2.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.
   (a) Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques. 0.75pt
   (b) Montrer que l'écriture complexe de σ est : $z \longmapsto \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z + 1 - \mathrm{i}$. 0.75pt
   (c) Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z - z' = \mathrm{i}\,(2 - z')$. 0.5pt
2. (a) Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = \mathrm{i}(p - a)$. 0.5pt
   (b) Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega M M'$, pour M distinct de Ω. 0.5pt
3. Soit A_0 le point d'affixe $2 + \mathrm{i}$.
   On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :

$$\text{pour tout entier naturel} \quad n,\ A_{n+1} = \sigma\left(A_n\right).$$

(a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2.$$

1pt

(b) Déterminer l'affixe de A_5. 0.5pt

Exercice 3 [**5.5pts**]

1. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$(\mathrm{E}) : z^3 - (2+3i)z^2 + (4+6i)z - 8 = 0$$

   (a) Démontrer que (E) admet une solution réelle et une seule. 1pt

   (b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. 1.5pt

   (c) Soient A, B et C les points images des solutions de (E) dans le plan complexe. Démontrer que A, B et C sont les points d'un cercle dont on précisera le centre. 1.5pt

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - (2+3i)z^4 + (4+6i)z^2 - 8 = 0$. 1.5pt.

Exercice4 [**4pts**]

Une ferme spécialisée dans la production des lapins désire produire des lapins de couleur noire, blanche et grise. La production d'un lapin nécessite 5 mois de travail pour le noir, 3 mois pour le blanc et $\frac{1}{3}$ de mois pour le gris. On admet qu'une seule couleur de lapin est produite à la fois.

La ferme produit 100 lapins pendant 100 mois de travail, le nombre de lapins blancs étant le tiers du nombre de lapins noirs.

1. Déterminer les équations traduisant :

   (a) la contrainte sur le temps ; 1pt

   (b) la contrainte sur la production. 1pt

2. Parmi ces 100 lapins, combien sont de chaque couleur ? 2pts