PREPARATION AU BACCALAURÉAT 2013/ Par M NKEUNA
SUJET N°1

Exercice 1

Cet exercice comporte deux parties indépendantes.

Partie A :

Une urne contient dix boules : deux bleues, cinq noires, trois rouges. On effectue deux tirages successifs sans remise, au hasard, et on note dans l'ordre le résultat obtenu. Calculer la probabilité de l'événement :« tirer une boule bleue au deuxième tirage».

Partie B :

Une urne contient deux boules rouges et trois boules vertes. On tire deux boules successivement.
Dans chacun des cas suivants calculer la probabilité des événements A et B suivants :

- A « obtenir un tirage bicolore»
- B « obtenir un tirage monocolore»

1. On remet la première boule tirée dans l'urne avant de tirer la seconde.
2. On ne remet pas la première boule tirée dans l'urne.

Exercice 2

les deux parties sont indépendantes

Partie A :

1. Soit h la fonction définie par $h(x) = x^2e^{-x}$. On pose $K = \int_0^1 h(x)dx$. Montrer que $K = 2 - \frac{5}{e}$
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2e^{-x}}$. On pose $K = \int_0^1 f(x)dx$
   a. Montrer que, pour tout x de l'intervalle [0,1], $0 \leqslant x^2e^{-x} \leqslant 1$
   b. Vérifier que pour tout u de l'intervalle [0,1], $1-u \leqslant \frac{1}{1+u} \leqslant 1 - \frac{u}{2}$
   c. En déduire que $1 - K \leqslant I \leqslant 1 - \frac{K}{2}$
   d. Donner un encadrement de I d'amplitude 0,1.

Partie B :

On considère la suite d'intégrales :$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}dx$;$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx \ldots, I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}dx$

1. a. Calculer I_1 et $I_0 + I_1$; en déduire I_0.
   b. Pour tout entier naturel n, calculer $I_{n+1} + I_n$
2. a. Montrer sans calculs que la suite (I_n) est croissante.
   b. Prouver que pour tout élément x de [0,1], $\frac{e^{nx}}{e+1} \leqslant \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leqslant \frac{1}{2}e^{nx}$
   c. En déduire un encadrement de I.
   d. A partir de cet encadrement, donner la limite de I_n et celle de $\frac{I_n}{e^n}$

Exercice 3

1. Soit (E) l'équation différentielle : $2y' + 3y = 0$. Déterminer toutes les solutions de (E).
2. On note (E') l'équation différentielle $2y' + 3y = x^2 + 1$
   a. Déterminer une fonction f, polynôme du second degré, solution de (E').
   b. Démontrer que si g est solution de (E'), alors $g - f$ est solution de (E).
   c. Réciproquement, démontrer que si $g - f$ est une solution de (E), alors g est solution de (E').
   d. Déterminer toutes les solutions de (E')
3. Déterminer toutes les solutions de l'équation $2y' + 3y = \cos x$

Problème

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$
ζ sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités 5cm en abscisse et 10cm en ordonnée.

Partie A :

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par : $g(x) = 2x - (x - 1)\ln(x - 1)$
   a. Quelle est la limite de g lorsque x tend vers 1 ?
   b. Calculer $g'(x)$ pour tout $x > 1$
   c. Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x - 1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$
   d. Étudier le sens de variation de g.
   e. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α dans l'intervalle $[e + 1,\ e^3 + 1]$ et étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. On note γ la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $\gamma(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 1)}{x}$
   a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} \gamma(x)$ et prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \gamma(x) = 0$
   b. Calculer $\gamma'(x)$ et démontrer que $\gamma'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$
   c. Démontrer que γ est croissante sur l'intervalle $]1, \sqrt{\alpha}$ et décroissante sur l'intervalle $]\sqrt{\alpha}; +\infty[$

Partie B :

1. Vérifiez que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \gamma(e^x)$
2. Déduisez - en
   a. la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
   b. la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$
   c. le sens de variation de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$
   d. que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$
3. Tracez la courbe ζ