PREPARATION AU BACCALAURÉAT 2010/ Par M NKEUNA

SUJET N°4

Exercice 1

On considère les points A, B et C d'affixes respectives a , b et c tels que $a = 3 + i$ $b = 2i$, $c = 2 - 2i$

1. a. Placer les points A, B et C sur une figure (unité 2cm)

   b. Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$

   c. En déduire la nature du triangle ABC

   d. Justifier que le point C est l'image de B par une rotation que l'on caractérisera.

2. On désigne par f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z - 1 - 3i$

   a. Calculer l'affixe du point D, image de B par f.

   b. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? justifier la réponse.

   c. Interpreter géométriquement la transformation f.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2+3u_n}{4+u_n}$

1. a. Grâce à une calculatrice, observer le comportement des cinq premier termes de cette suite.

   b. Peut -on formuler des conjectures sur son sens de variation et sa convergence éventuelle ?

2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{2+3x}{4+x}$. En déduire une construction graphique des premiers termes de cette suite.

3. a. résoudre l'équation $f(x) = x$

   b. En déduire toutes les valeurs possibles pour la limite éventuelle de la suite (u_n).

4. a. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{2+u_n}{1-u_n}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

   b. En déduire les variations et la limite de la suite (u_n)

Exercice 3

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $\dfrac{1}{x(1+x)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1+x} + \dfrac{c}{(1+x)^2}$

2. Soit $I > 1$

   a. Calculer $\displaystyle\int_1^I \frac{dx}{x(1+x)^2}$

   b. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par : $\varphi(I) = \displaystyle\int_1^I \frac{\ln x}{(1+x)^3}dx$. En intégrant par parties, calculer $\varphi(I)$ en fonction de I.

   c. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} = 0$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$

Problème

Ce problème comporte trois parties indépendantes.

Partie A :

Soit la fonction f telle que $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$

1. Déterminer l'ensemble sur lequel f est définie.
2. Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer la dérivée et dresser le tableau de variation de f.
4. Soit a un réel tel que $2 - a$ et $2 + a$ appartiennent au domaine de définition de f.
   Montrer que $f(2 + a) = f(2 - a)$. En déduire une propriété de la droite d'équation $x = 2$ concernant la courbe representative de f dans un repère orthonormal.
5. Indiquer selon les valeurs du réel m, le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$.
6. Tracer la courbe representative de f.

Partie B :

Une urne contient deux boules rouges et m boules noires(m entier naturel non nul), indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'être tirée. On tire 3 boules successivement avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres en fonction de m
2. Déterminer m pour que l'espérance de X soit 1,2.

Partie C :

1. On considère l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = 0$: (E)
   a. Soit z une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$. Démontrer que xz est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle (E') $xz' = A$ $(A \in \mathbb{R})$
   b. Résoudre sur $]0; +\infty[$ (E'), puis (E).
2. A l'aide d'un raisonnement analogue, resoudre sur $]-\infty; 0[$ l'équation différentielle $y' = \dfrac{x + y}{x}$