COLLEGE DU SOLEIL
LOGBESSOU - DOUALA

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
ANNÉE SCOLAIRE 2008-2009
Classe $\mathbf{T}^{\mathrm{le}}$ D Coef : 4 Durée : 4 h

DEVOR DE MATHÉMATIQUES / MAI 2009

L'épreuve comporte 3 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

A tout point M de coordonnées $(a;b)$ (a et b réels) est associé l'équation (E) $z^2 - 2az + b = 0$.

1. Résolvez (E) lorsque (a ;b)=(2 ;1) puis (a ;b)=(-1 ;4).
2. Déterminez les ensembles E_1,E_2,E_3 de points $M(a;b)$ tels que.
   a. (E) admet deux solutions confondues.
   b. (E) admet deux solutions réelles distinctes.
   c. (E) admet deux solutions non réelles .
   Dans chaque cas, exprimer les solutions.
3. Déterminer l'ensemble des points $M(a;b)$, tels que les solutions z' et z'', réelles ou complexes, vérifient $\mid z' - z'' \mid < 2$

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie pour $x > \dfrac{1}{2}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$. Démontrer que, pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 1$.
2. On défini la suite (u_n) par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout entier naturel n.
   On considère les suites (v_n) et (w_n) telles que pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ et $w_n = \ln v_n$
   a. Vérifiez que v_n et w_n sont définies pour tout entier naturel n.
   b. Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique
   c. Exprimez pour tout entier naturel n, w_n, puis v_n en fonction de n.
   d. Déduisez - en que : $u_n = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$
   e. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 3

1. Démontrer que la fonction définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x + \sin x}$ est continue sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$
3. Déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

Problème

Partie A :

Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

1. a. Montrer que f peut aussi s'écrire $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   c. Étudier les variations de f et dressez son tableau de variations.

2. a. Montrer que f est une bijection de l'intervalle $[0;+\infty[$ vers $[0;1[$.

   b. Si on appelle g la fonction réciproque de f, montrer que g est définie par $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ sur l'intervalle $[0;1[$.

3. Tracer les courbes representatives de f et g dans un même repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$, ainsi que leur tangente à l'origine. (unité 10cm).

Partie B :

Encadrement de g

1. Soit φ_1 définie sur l'intervalle $[0;1[$ par $\varphi_1 = x + \dfrac{x^3}{3} - g(x)$. Étudier les variations de φ_1 et montrer que $\varphi_1(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[0;1[$.

2. Soit φ_2 définie sur l'intervalle $[0;1[$ par $:= g(x) - x - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5}$.Étudier les variations de φ_2 et montrer que $\varphi_2(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{2}{5}\right[$.

3. En déduire que pour tout x de l'intervalle $\left[0;\dfrac{2}{5}\right[$, on a $= x + \dfrac{x^3}{3} \leqslant g(x) \leqslant x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$

Partie C :

Calcul approché de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{2}{5}} g(x)dx$

1. On pose $\alpha = g\left(\dfrac{2}{5}\right)$. Calculer α à 10^{-4} près.

2. En utilisant les representations graphiques de la partie A, interprétez I sous forme d'aire et justifiez l'égalité suivante $I = \dfrac{2}{5}\alpha - \displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)dx$.

3. Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)dx$ en fonction de α. et en déduire la valeur approchée de I en utilisant la valeur approchée de α.