Examen : **PROBATOIRE** *Session* : **2016**

Série : **C-E**

Epreuve ZERO : Mathématiques

Durée : **3h** Coefficient : **6 (C)** et **5 (E)**

L'épreuve comporte trois exercices et un problème étalés sur trois pages.

EXERCICE 1 : 4 points

$ABCDEFGH$ est un cube d'arêtes de longueur $4cm$. I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes $[AB],[EF],[GH]$ et $[DH]$.

1. On veut démontrer que les plans (JKC) et (EHI) sont parallèles.

(a) Justifier que B appartient au plan (JKC). **0,25pt**

(b) Donner la nature du quadrilatère $HKBI$. Justifier. **0,25pt**

(c) Justifier alors que la droite (HI) est parallèle au plan (JKC). **0,5pt**

(d) Démontrer alors le résultat attendu. **0,5pt**

2. (a) Dessiner en vraie grandeur la face $DCGH$ et y placer les points K et L. **0,5pt**

(b) Démontrer que les droites (LG) et (KC) sont perpendiculaires. **0,5pt**

(c) Démontrer alors que la droite (LG) est perpendiculaire au plan (EHI). **0,5pt**

3. Soit M le barycentre des points pondérés $(H,1);(D,1)$ et $(G,3)$.

Démontrer que M est le point d'intersection des droites (KC) et (LG). **1pt**

EXRCICE 2 : 2 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère la droite (D) d'équation $x-2y+4=0$ et le point $A(1;0)$.

1. Vérifier que le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et tangent à la droite (D) a pour équation :

$x^2+y^2-2x-4=0$. **0,75pt**

2. On considère la suite numérique (u_n) telle que : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$

(a) Vérifier que le point $M(u_0,u_1)$ est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et (D). **0,25pt**

(b) On pose $v_n = u_n - 4$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et en déduire une expression de u_n en fonction de n uniquement. **1pt**

EXERCICE 3 : 3 points ***Pour la série C uniquement.***

Le plan vectoriel E est rapporté à la base $\mathscr{B}=(\vec{i},\vec{j})$. Soit φ l'endomorphisme de E qui transforme tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ en un vecteur $\vec{u}' = \varphi(\vec{u}) = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = 7x - 8y \\ y' = 4x - 5y \end{cases}$$

1. Donner la matrice M de φ dans la base $\mathscr{B}$. **0,5pt**
2. φ est-il bijectif ? **0,25pt**
3. Soit α un réel. On note $E_\alpha = \left\{\vec{u} \in E / \varphi(\vec{u}) = \alpha\vec{u}\right\}$.
   (a) Montrer que E_α est un sous espace vectoriel. **0,75pt**
   (b) Déterminer les réels α pour lesquels on a $E_\alpha \neq \left\{\vec{0}\right\}$. **0,5pt**
4. Soient $\vec{I} = 2\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{J} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\mathscr{B}' = (\vec{I}, \vec{J})$
   (a) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E. **0,5pt**
   (b) Donner la matrice M' de φ dans la base $\mathscr{B}'$. **0,5pt**

EXERCICE 3 : 3 points *Pour la série E uniquement.*

OTE a utilisé 117 pièces de taille identique pour monter un circuit électronique sur une planche rectangulaire de $54cm$ de long sur $36cm$ de large. Il a régulièrement espacé les pièces suivant des rangées parallèles aux côtés de la planche. Les rangées extrêmes sont sur les bords de la planche avec une pièce à chaque extrémité.

On se propose de déterminer la distance commune x entre deux rangées consécutives dans les deux sens.

1. **(a)** Montrer qu'on a l'égalité suivante : $\left(\frac{54}{x}+1\right)\left(\frac{36}{x}+1\right)=117$. **0,5pt**
   (b) Résoudre l'équation (E) : $\left(\frac{54}{x}+1\right)\left(\frac{36}{x}+1\right)=117$. **1pt**
   (c) Déterminer le nombre de rangées dans le sens de la longueur et le nombre de rangées dans le sens de la largeur. **0,5pt**
2. **(a)** Décomposer 117 en produit de facteurs premiers. **0,25pt**
   (b) En déduire les décompositions possibles de 117 en un produit de facteurs premiers à 1. **0,5pt**
   (c) Retrouver ainsi le nombre de rangées dans les deux sens. **0,25pt**

PROBLEME : 11 points

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unités sur les axes $1cm$.

A) Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. Sa courbe est notée (C_f).

1. **(a)** Calculer les limites de f aux bornes de D. En déduire l'équation d'une asymptote

à la courbe $\left(C_f\right)$. **1pt**

(b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe $\left(C_f\right)$. **0,25pt**

2. Montrer que le point $\Omega(-1,-2)$ est le centre de symétrie de la courbe $\left(C_f\right)$. **0,25pt**

3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **1pt**

4. Tracer la courbe $\left(C_f\right)$. **1,5pt**

B) Soit g la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g. Etudier sa parité. **0,75pt**

2. Tracer sur le graphique précédent, la courbe $\left(C_g\right)$ représentative de la fonction g. **1,25pt**

C) On considère la fonction numérique d'une variable réelle h définie par $h(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x + 1}$.

1. Justifier que l'ensemble de définition de h est

$$D' = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$ **0,5pt**

2. Montrer que h est périodique de période 2π. **0,25pt**

3. Etudier la parité de h. **0,25pt**

4. Justifier que l'on peut se contenter d'étudier h sur $[0,\pi[$. **0,25pt**

5. Etudier les variations de h sur $[0,\pi[$ et dresser son tableau de variation sur cet intervalle. **1,5pt**

6. Tracer sur un autre graphique, la courbe $\left(C_h\right)$ de la restriction de h sur $]-3\pi, 3\pi[$. **1,5pt**

7. Soit m un paramètre réel. Discuter suivant les valeurs de m, le nombre de solutions dans $]-\pi,\pi[$ de l'équation $(E')\colon \cos^2 x = m(1+\cos x)$. **0,75pt**