Ministère des Enseignements Secondaires
Lycée Classique d'Edéa
Département de Mathématiques

Année scolaire **: 2011 – 2012**
Classe **: 1$^{\text{ère}}$ C**
Durée **: 3h** Coefficient **: 6**
Prof : T.N AWONO – MESSI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 : 3 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^2 + 9x - 4140 = 0$. **0,5pt**
2. On dispose d'une subvention de 414 000 FCFA pour atteindre, dans une localité , une nappe souterraine . Le coût du forage est fixé à 1000 FCFA pour le premier mètre creusé, 1200 FCFA pour le deuxième , 1400 FCFA pour le troisième et ainsi de suite en augmentant de 200 FCFA par mètre creusé.
   On désigne par u_n le coût en FCFA du n-ième mètre creusé ($n \in \mathbb{N}^*$).
   (a) Déterminez u_5. **0,5pt**
   (b) Précisez la nature de la suite (u_n) et exprimez u_n en fonction de n. **1pt**
   (c) Montrez que le coût total d'un puits de n mètres est $S_n = 100n^2 + 900n$. **0,5pt**
   (d) Indiquez la profondeur maximale du forage que l'on peut réaliser. **0,5pt**

Exercice 2 : 5 points

Dans le plan , on considère un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$
Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $\left(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CI}\right) = -\frac{\pi}{2}$

1. Faire une figure , que l'on complètera au fur et à mesure. On prendra $AB = 5$ cm. **0,5pt**
2. Soit r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $f = r_C \circ r_A$.
   (a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$. **0,5pt**
   (b) Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O. **1pt**
   (c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABOC$? **0,5pt**
3. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C' l'image de C par s , H le milieu de $[BC]$ et H' son image par s.
   (a) Donner une mesure de l'angle de s. **0,5pt**
   (b) Montrer que C' appartient à la droite (OA). **0,5pt**
   (c) Donner l'image par s du segment $[OA]$ et montrer que H' est le milieu de $[OB]$. **0,5pt**
   (d) Montrer que $(C'H')$ est perpendiculaire à (OB). **0,5pt**
   (e) En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC. **0,5pt**

Problème : 12 points

Partie A : 4 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On donne $E(2;0)$ et F l'image de E par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$. I est le milieu de $[EF]$.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes de F et I. **1pt**
2. **(a)** Déterminer la nature du triangle OEF. **0,5pt**

   (b) En déduire la mesure principale de $\left(\vec{\imath};\overrightarrow{OI}\right)$. **0,5pt**
3. Déduire des questions 1 et 2 , les valeurs exactes de $\cos\dfrac{3\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{8}$ **1pt**
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{2-\sqrt{2}}\cos x+\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin x=-1$ **1pt**

Partie B : 3 points

Le plan vectoriel réel E_2 est muni d'une base $\mathcal{B}=(\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On donne $\overrightarrow{e_1}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$.

1. Démontrer que $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ est une base de E_2. **0,5pt**
2. Soit f l'endomorphisme de E_2 défini par :

$$\forall\,\vec{u}(x;y)\in\mathbb{R}^2, f(\vec{u})=\left(x-\frac{1}{2}y\right)\vec{\imath}+(2x-y)\vec{\jmath}$$

   (a) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$. **0,5pt**

   (b) f est-il un automorphisme ? **0,25pt**

   (c) Déterminer le noyau $Kerf$ et l'image Imf de f. Préciser une base et la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels. **1,25pt**

   (d) Trouver la matrice A' de f dans la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$. **0,5pt**

Partie C : 5 points

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{x+1}{1+x^2}$ et $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\|=2$ cm et $\|\vec{\jmath}\|=1$ cm.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. **1pt**
2. **(a)** Déterminer les coordonnées du point A intersection de $\left(C_f\right)$ avec l'axe des abscisses et le point B intersection de $\left(C_f\right)$ avec l'axe des ordonnées. **0,5pt**

   (b) Donner les équations des tangentes T_1 et T_2 à la courbe $\left(C_f\right)$ en A et B. **0,5pt**
3. **(a)** Etudier les positions relatives de $\left(C_f\right)$ et T_1 puis de $\left(C_f\right)$ et T_2. **1pt**

   (b) Construire soigneusement T_1 , T_2 et $\left(C_f\right)$. **1pt**

   (c) Discuter graphiquement le nombre de solutions de (E_m): $mx^2-x+m-1=0$ **1pt**