Lycée Bilingue de Mbanga, Année académique 2011/2012

Epreuve de Mathématiques

Classe: $1^{ere}C$, Probatoire Blanc , Durée: 03 heures

****

L'épreuve comporte trois exercices indépendants et un problème " Have a safe journey!!! ".

Exercice 1: *3,5 points* *L'aquarium de Saint Ivan F.*

Un aquarium est entretenu par un système d'évacuation d'eau un peu particulier. Tous les soirs, il se vide de moitié et reçoit ensuite 500 litres d'eau. Le premier jour, cette aquarium commence à fonctionner avec une quantité $u_0 = 800$ litres d'eau. On note u_n la quantité d'eau présente dans l'aquarium le matin du $(n+1)^{eme}$ jour.

1. Calculer u_1; u_2 et u_3. (0,75pt)
2. Ecrire u_{n+1} en fonction de u_n. (0,5pt)
3. On pose $w_n = 1000 - u_n$. Montrer que la suite $(w_n)_n$ ainsi définie est géométrique, preciser sa raison et son premier terme. (1pt)
4. (a) En déduire l'écriture de u_n en fonction de n. (0,75pt)
   (b) A votre avis, cet aquarium tarira t-il à la longue? ou débordera t-il par excès d'eau?

Exercice 2: *6,5 points*

Dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$ de $\mathbb{R}^2$, on considère la symétrie vectorielle f définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ par son expression analytique: : $\begin{cases} x' = \dfrac{3x}{5} - \dfrac{4y}{5} \\ y' = -\dfrac{4x}{5} - \dfrac{3y}{5} \end{cases}$

1. (a) Déterminer l'ensemble *Inv* des vecteurs invariants par f. Que représente t-il pour f? (1pt)
   (b) Montrer que *Inv* est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (1pt)
2. (a) Ecrire la Matrice A de f relativement à la base $\mathcal{B}$. (0,5pt)
   (b) Démontrer que f est un automorphisme. (0,5pt)
   (c) Déterminer *Kerf*. (0,5pt)
3. On donne $\overrightarrow{e_1} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$; et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$
   (a) Montrer que $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$ que l'on notera $\mathcal{B}'$. (1pt)
   (b) Ecrire $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ en fonction de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$. (1pt)
   (c) Exprimer $f(\overrightarrow{e_1})$ et $f(\overrightarrow{e_2})$ en fonction de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$; puis écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. (1pt)

Exercice 3: *1 point*

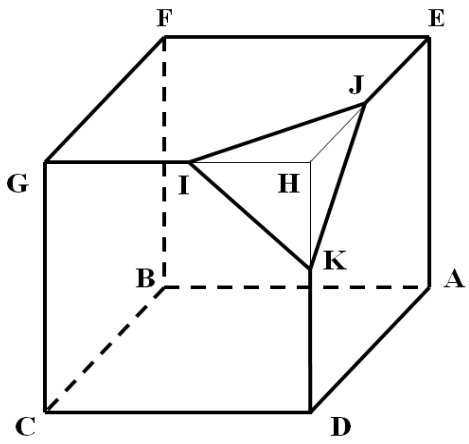
Est-il plus évident de trouver les 3 premiers d'une course de 10 chevaux numérotés de 1 à 10, que de choisir au hasard et simultanément 4 exercices dans une fiche de TD à 13 exercices, ou encore d'accueillir 6 personnes dans l'ordre d'arrivée sur un banc à 6 places numérotées de 1 à 6 ?

Problème: ***09 points***

Les deux parties A et B de ce problème sont indépendantes.

Partie A:

On considère le cube BCDAFGHE ci-dessous. On considère ensuite la section au sommet H de ce cube par un plan $(\mathcal{P})$ contenant les points I, J et K milieux respectifs des segments $[GH]$, $[EH]$ et $[DH]$.



1. Citer un plan parallèle à $(\mathcal{P})$. (0,5pt)
2. A présent on choisit $\mathcal{R} = (B; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BF})$ comme repère de l'espace.
   (a) Déterminer les coordonnées de I, J et K dans le repère $\mathcal{R}$. (0,75pt)
   (b) Déterminer une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ dans le repère $\mathcal{R}$. (1pt)
   (c) Déterminer une équation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$ passant par B et par H. (0,75pt)
   (d) Déterminer $(\mathcal{D}) \bigcap (\mathcal{P})$. (0,5pt)

Partie B:

On considère la famille des fonctions f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = \dfrac{x^m}{x^2+2}$, avec $m \geq 3$ un entier naturel. On notera $(\mathcal{C}_m)$ leurs courbes.

1. Monter que toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par deux points Ω_1 et Ω_2, et déterminer leurs coordonées. (1pt)
2. Calculer les limites de f_m en $-\infty$ et en $+\infty$ (discuter sur la parité de l'entier m). Préciser le(s) cas où il ya existence d'une asymptote oblique. (1pt)
3. (a) Calculer la dérivée f'_m de f_m sur $\mathbb{R}$, puis montrer que pour tout réel x, on a $f'_m(x) = \dfrac{x^{m-1}[(m-2)x^2+2m]}{(x^2+2)^2}$, avec entier $m \geq 3$. (1pt)
   (b) En fonction de m, etudier les variations de f_m sur $\mathbb{R}$ et construire les tableaux de variations de f_m dans chacun des deux cas. (1,5pt)
4. (a) Selon les valeurs de m, les courbes $(\mathcal{C}_m)$ admettent-elles un axe ou un centre de symétrie? (0,5pt)
   (b) Construire $(\mathcal{C}_3)$ et $(\mathcal{C}_4)$ dans le même repère. (1pt)

Examinateur: *M. Achille Stéphane Hyéfouais*