MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA		
EXAMEN	MATHEMATIQUES	PREPA PROBATOIRE C	Session : 2013
COEFF. 6	Prof : T.N. AWONO-MESSI	SUJET N° 1	Durée : 3H

L'examinateur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation de la copie.

EXERCICE 1 : 4 points

$(\mathcal{D})$ est une droite graduée de repère $(O\,;\vec{\imath})$. Soit A_0 et B_0 les points de $(\mathcal{D})$ d'abscisses respectives -1 et 2. On définit deux suites de points (A_n) et (B_n) pour tout entier naturel n par : $A_{n+1} = bar\{(A_n\,,2)\,;\,(B_n\,,3)\}$ et $B_{n+1} = bar\{(A_n\,,3)\,;\,(B_n\,,2)\}$. On note a_n et b_n les abscisses respectives de A_n et B_n dans le repère $(O\,;\vec{\imath})$.

1. Déterminer et construire A_1 et B_1. **0,5pt**
2. Démontrer que $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 3b_n}{5}$. Calculer de même b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. **1pt**
3. On pose pour tout entier naturel n , $\mathrm{U}_n = a_n + b_n$ et $\mathrm{V}_n = a_n - b_n$.
   (a) Montrer que la suite (U_n) est constante. Déterminer cette constante. **0,75pt**
   (b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera. **0,75pt**
4. Exprimer a_n et b_n en fonction de n. **1pt**

EXERCICE 2 : 4 points

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a $(a \in \mathbb{R}\,,\ a > 0)$.

1. Construire le point G tel que : $\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{BC}$. **0,5pt**
2. Montrer que l'on a : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Qu'en conclure ? **0,5pt**
3. Soit (Γ_k) l'ensemble des points M du plan tels que :
   $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = (k+4)a^2$ où $k \in \mathbb{R}$
   (a) Montrer que $MG^2 + GA^2 + 2GB^2 - 2GC^2 = (k+4)a^2$. **0,5pt**
   (b) On donne $GA = 2a$, $GB = a\sqrt{3}$ et $GC = a\sqrt{6}$. Préciser l'ensemble (Γ_k) dans chacun des cas suivants : (i) $k < -6$; (ii) $k = -6$; (iii) $k > -6$. **1,5pt**
4. On pose : $k = \dfrac{12}{\sqrt{3}}\sin x$. Déterminer l'ensemble S des réels x pour lesquels on a : $(\Gamma_k) = \{G\}$. **1pt**

EXERCICE 3 : 1 point

Est-il plus évident de trouver les 3 premiers d'une course de 10 chevaux numérotés de 1 à 10, que de choisir au hasard et simultanément 4 exercices dans une fiche de TD à 13 exercices ? **1pt**

PROBLEME : 11 points

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B .

Partie A 5 points

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On donne $A(1;1;0)$ et on considère le plan (P) d'équation : $x+y+z+1=0$.

1. Donner l'équation cartésienne réduite de la sphère (S) de centre A et de rayon 3. **0,75pt**
2. Calculer la distance entre A et (P). **0,5pt**
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal I du point A sur le plan (P) . **1pt**
4. *Dans cette question , toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative de recherche même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S) $\cap$ (P). **1pt**
5. Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par le point $B(-1;3;2)$ et orthogonale au plan (P) . Soit (Δ) la droite d'équations paramétriques : $\begin{cases} x=6 \\ y=1+2\mu \\ w=1-2\mu \end{cases}$ $(\mu\in\mathbb{R})$

   (a) Montrer que $(\mathcal{D})$ et (Δ) sont non coplanaires. **1pt**

   (b) Déterminer l'intersection de (Δ) et (P). **0,75pt**

Partie B 6 points

On considère la famille des fonctions f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x)=\dfrac{x^m}{x^2+2}$, avec $m\geq 3$ entier naturel. On notera $\mathcal{C}_m$ leurs courbes.

1. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par deux points Ω_1 et Ω_2 , et déterminer leurs coordonnées. **1pt**
2. Calculer les limites de f_m en $-\infty$ et en $+\infty$ (discuter sur la parité de l'entier m). Précisez le (s) cas d'existence d'asymptote oblique. **1pt**
3. **(a)** Calculer la dérivée f_m' de f_m sur $\mathbb{R}$, puis montrer que pour tout réel x , on a :

   $$f_m'(x)=\frac{x^{m-1}\left[(m-2)x^2+2m\right]}{\left(x^2+2\right)^2} \qquad \text{avec } m\geq 3.$$ **1pt**

   (b) En fonction de m , étudier les variations de f_m sur $\mathbb{R}$ et dresser les tableaux de variations de f_m dans chacun des deux cas. **1,5pt**

   (c) Construire $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ dans le même repère. **1,5pt**

TNAM080313