4 : BARYCENTRE

LISTE DES COMPETENCES	
CODE	**DENOMINATION**
B101	Construction du barycentre de deux points
B102	Construction du barycentre de trois points
B103	Construction du barycentre de plus de trois points
B104	Homogénéité du barycentre
B105	Barycentre partiel
B106	Lignes de niveau
B107	Démontrer que trois points sont alignés
B108	Démontrer que trois droites sont concourantes
B109	
B110	
B101	
B111	
B112	
B113	
B114	
B115	
B116	
B117	
B118	
B119	
B120	
B121	
B122	
B123	

Exercice n°1

A et B sont deux points distincts. Construire, s'il existe, le barycentre :

1. G des points pondérés (A ; 1) et (B ; 3).
2. H des points pondérés (A ; 2) et (B ; 2).
3. J des points pondérés (A ; -1) et (B ; 2).
4. K des points pondérés (A ; -2) et (B ; -6).
5. L des points pondérés (A ; -2) et (B ; 2).

Exercice n°2

Soient A et B deux points.

Déterminer et construire le barycentre G1 de (A ; 1) et (B ; 3)

Déterminer et construire le barycentre G2 de (A ; -1) et (B ; 4)

Déterminer et construire le barycentre G3 de (A ; 2) et (B ; -3)

Déterminer et construire le barycentre G4 de (A ; -4) et (B ; 6). Que remarque-t-on ?

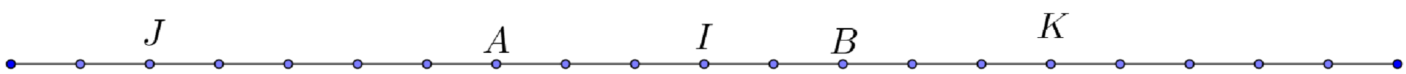
Exercice n°3

Dans chacun des cas suivants, donner des coefficients α et β tels que M soit barycentre de (A ; α) et (B ; β).

1) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}=\vec{O}$
2) $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{AB}$
3) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
4) $-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$

Exercice n°4

La graduation étant régulière, exprimer chacun des points I, J, K comme barycentre de A et B affectés de coefficients à déterminer.



Exercice n°5

C est le barycentre de (A ; 3) et (B ; -7).

• Déterminer deux réels β et γ tels que A soit barycentre de (B ; β) et (C ; γ).

• Déterminer deux réels α et δ tels que B soit barycentre de (A ; α) et (C ; δ).

• Faire un dessin.

Exercice n°6

Soit G le barycentre de (A ; α) et (B ; β) (α + β ≠0).

• Montrer que si α et β sont tous deux positifs alors G se trouve sur le segment [AB].

• Où se trouve le point G si α et β sont tous deux négatifs ?

• Où se trouve le point G si α et β sont de signes contraires

Exercice n°7

Dans le plan rapporté au repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère P(-1 ; 3) et Q(2 ; -5). Déterminer les coordonnées de R barycentre de (P ; 5) et (Q ; -2).

Exercice n°8

Dans le plan rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

on considère les points : A(-1 ; -1) ; B(0 ; 3) ; $\left(-\sqrt{3};3\right)$ Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Déterminer β et γ tels que A soit barycentre de (B ; β) et (C ; γ) .

Exercice n°9

On considère trois points A, B et C.

1°) Montrer qu'il existe un et un seul point G tel que $\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GC}=\vec{O}$.

On pourra exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Placer le point G sur un dessin.

2°) Mêmes questions avec $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GC}=\vec{O}$

Exercice n°10

On considère trois points A, B et C. Existe-t-il un ou plusieurs point(s) G tel que $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-5\overrightarrow{GC}=\vec{O}$.

Exercice n°11

Soit ABC un triangle. Construire le point G barycentre de (A ; 2) (B ; 1) (C ; -2).

Exercice n°12

Soit ABC un triangle et E tel que : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Montrer que E est barycentre de A, B et C affectés de coefficients à déterminer.

Exercice n°13

On considère un triangle ABC. Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients 5 ; 3 et 2.
Soit H le barycentre de A et B affectés des coefficients 5 et 3.

1°) Exprimer $5\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}$ en fonction de $\overrightarrow{GH}$.

2°) En déduire une relation entre $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GC}$ et montrer que G est barycentre de H et C affectés de coefficients que l'on déterminera. Placer le point G sur un dessin.

3°) Soit K le barycentre de B et C affectés des coefficients 3 et 2. Montrer que G est barycentre de A et K affectés de coefficients que l'on déterminera. Que peut-on en déduire pour G ?

Exercice n°14

A, B et C étant 3 points donnés, sans faire de calculs, placer le point G barycentre de (A ; 1) (B ; 2) (C ; 1).

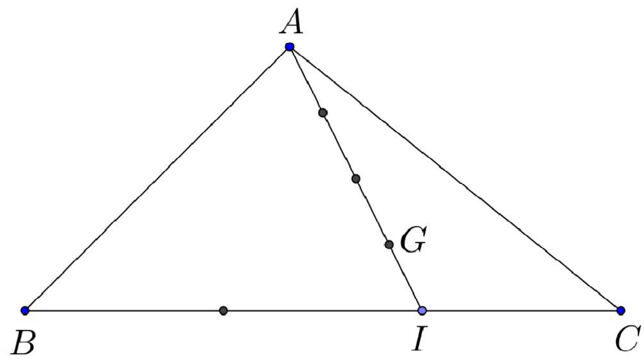
Exercice n°15

On considère un triangle ABC. Soit H le point défini par $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et K le point défini par

$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Placer les points H et K sur un dessin. Exprimer H comme barycentre des points A et C . Exprimer K comme barycentre des points A, B et C.

Exercice n°16

Sur la figure ci-contre les graduations sur les segments [BC] et [AI]sont régulières. Exprimer le point G comme barycentre des points A, B et C affectés de coefficients à déterminer. La droite (CG) coupe la droite (AB) en un point H. Préciser la position de H sur le segment [AB].



Exercice n°17

On considère un triangle ABC. Les points I et G sont définis par : $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Soit H le point d'intersection de la droite (CG) avec la droite (AB). Préciser la position de H par rapport à A et B.

Exercice n°18

Dans un plan muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points A(1 ; 1) et B(5 ; 3).

1. Calculer les coordonnées du barycentre G de (A ; 2) et (B ; 1).
2. Déterminer des réels a et b tels que H(-1 ; 0) soit le barycentre de (A ; a) et (B ; b).
3. Peut-on trouver a et b tels que O soit le barycentre de (A ; a) et (B ; b) ?

Exercice n°19

Soit A et B deux points tels que AB = 4.

On considère le barycentre G de (A ; 1) et (B ; 3) et le barycentre K de (A ; 3) et (B ; 1).

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Placer sur un dessin les points A, B, G et K.
2. Montrer que les segments [AB] et [GK] ont le même milieu.

Exercice n°20

Soit QUAD un quadrilatère.

Construire le barycentre G de (Q ; 1), (U ; 1), (A ; -2) et (D ; -1).

Exercice n°21

Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB] et G le barycentre des points pond´er´es (A ;1), (B ;1) et (C ;1).

1. Montrer que G est le barycentre de (C ; 1) et (C' ; 2).
2. En déduire la position de G sur le segment [CC'].
3. Démontrer que G appartient à [BB'] et à [AA']. Que peut-on en déduire ?

Exercice n°22

Soient A et B deux points.

1°) Montrer qu'il existe un et un seul point G tel que $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{O}$. Placer le point G sur un dessin.

Soit M un point. Écrire en fonction du vecteur $\overrightarrow{MG}$ le vecteur $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$.

2°) Mêmes questions avec $-3\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{O}$.

3°) On considère deux réels α et β. Existe-t-il un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{O}$?

Exercice n°23
Soient A et B deux points distincts.
1°) Soit G barycentre de (A ; α) et (B ; β) avec α + β ≠0. Démontrer que G est sur la droite (AB).
2°) Soit M un point de la droite (AB). Justifier qu'il existe un réel k tel $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. En déduire que M est barycentre des deux points A et B.

Exercice n°24
On considère, dans le plan, quatre points A, B, C et D.
1°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$
2°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

Exercice n°25
*Dans chacun des exercices suivants, une réponse **au moins** est exacte.*
Mettre V (vrai) pour une réponse juste, F (faux) pour une réponse fausse. Vous répondez à toutes les questions.

1. Le barycentre du système {(*A*, 1), (*B*, 3)} est :

Sur la demi-droite (*x' A*]		Sur la demi-droite [*B x*)	
Sur le segment [*AB*]		En dehors de la droite (*AB*)	

2. Le milieu *I* de [*AB*] est barycentre du système :

(*A*, 3) (*B*, 3)		(*A*, 3) (*B*, −3)	
(*A*, −3) (*B*, 3)		(*A*, −3) (*B*, −3)	

3. Soit *G* tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. *G* est le barycentre du système

(*A*, 6) (*B*, 2)		(*A*, −3) (*B*, −2)	
(*A*, 1) (*B*, 3)		(*A*, 5) (*B*, −1)	

4. *ABC* est un triangle. *I* est tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Alors le vecteur $\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ est égal à :

$\overrightarrow{CI}$		$4\overrightarrow{CI}$	
$\frac{4}{3}\overrightarrow{CI}$		$-\frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$	

5. *ABC* est un triangle. *A'*, *B'* et *C'* sont les milieux respectifs de [*BC*], [*CA*], [*AB*]. *G* est le centre de gravité du triangle *ABC*. Alors *G* est le barycentre de :

(*A*, 2) (*A'*, 2)		(*C*, −2) (*C'*, 1)	
(*B*, 2) (*B'*, 1)		(*A*, 2) (*B*, 2) (*C*, 2)	

6. Soit *ABC* un triangle, *G* le barycentre du système {(*A* , 3) ; (*B* , 1) ; (*C* , 1)}. Alors :

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})$		$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{5}(2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$	
$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})$		Pour tout point *M*, $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM})$	

7. Soit *G* le barycentre du système (*A* , 1) ; (*B* , 2) ; (*C* , 3) ;.(*D* , 4) où les points ont pour coordonnées : *A*(−1, 1) ; *B*(1, 1) ; *C*(1, −1) ; *D*(−1, −1) dans le repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$. Alors :

$\overrightarrow{OG}=-\frac{1}{5}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$		$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$	
$\overrightarrow{OG}=-\frac{1}{5}\vec{j}$		$\overrightarrow{OG}=-\frac{1}{5}\vec{i}$	

8. Soit *A*, *B*, *C* trois points distincts non alignés du plan et *x* un réel. On définit les points *M* par $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AC}$ et *N* par et $\overrightarrow{AN}=(1-x)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Alors :

Pour *x* = 3, *M* est le barycentre de {(*B*, $\frac{1}{2}$), (*C*, −2)}		Pour toute valeur de *x*, le point *N* appartient à la droite (*BC*).	
Pour $x=\frac{1}{2}$, il existe deux réels *b* et *c* tels que *M* soit le barycentre de {(B, *b*), (C, *c*)}.		Il existe une valeur de *x* pour laquelle *BNCM* est un parallélogramme.	

9. Soit *ABCD* un parallélogramme non aplati. *I* le milieu du côté [*AB*]. Alors :

I est le barycentre de {(*B*, 1), (*C*, 1), (*D*, 1)}.		*A* est le barycentre de {(*B*, 1), (*C*, −1), (*D*, 1)}	
Le barycentre *G* de {(*A*, 2), (B, 1), (C, 2)} est sur la droite (*BD*).		Le barycentre *H* de {(*A*, 2), (*B*, 1), (*C*, α)} est en *D* si α = 1.	

10. Un triangle *ABC* est isocèle de sommet *A*. *G* est l'isobarycentre de *A*, *B* et *C*. *G*' est le symétrique de *G* par rapport à la droite (*CB*). On détermine *b* et *c* tels que *G*' soit le barycentre de {(*A*, 1) (*B*, *b*) (*C*, *c*)}. Alors :

b = *c* = 2		*b* = *c* = −2	
b = 1,5 ; *c* = −1,5		*b* = −1 ; *c* = −1	

11. (Suite du 10.)
L'ensemble E des points *M* tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ est :

Le cercle de centre *G* et de rayon *GA*.		La droite (*GG*')	
Le cercle de centre *G*' et de rayon *G'I*.		La médiatrice de [*GG*']	

12. Soit *A*, *B*, *C* trois points non alignés du plan. *B*' le milieu du segment [*AC*] et *C*' celui de [*AB*]. Enfin, soit *G* le barycentre du système {(*A*, 3) (*B*, 2) (*C*, 1)}.

G est le barycentre du système {(*A*, −1), (*C*, 3), (*B*, 2) (*A*, 4) (*C*, −2)}.		*G* appartient au segment [*B'C'*]	
On a $\overrightarrow{BG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.		Tous les point *M* du plan vérifient : $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=6\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MC}$.	

Exercice n°26

Dans un quadrilatère *ABCD*, on appelle *I* le milieu de [*AC*], *J* le milieu de [*BD*] et *G* le point défini par : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC})$.

1. Montrer que *G* est le barycentre de (*A*, 2), (*B*, −1), (*C*, 2) et (*D*, −1).
2. En déduire que les points *I*, *J* et *G* sont alignés.

Exercice n°27
Soit *ABCD* un quadrilatère, *I* le milieu de [*AC*] et *J* celui de [*BD*].
Soit *K* le point défini par $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$ et *L* celui défini par $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$. *M* le milieu de [*LK*].
Le but du problème est de montrer que *M*, *I* et *J* sont alignés et de donner la position de *M* sur la droite (*IJ*).
1. Faire une figure.
2. Justifier l'existence du barycentre *G* de {(*A*, 1) ; (*B*, 2) ; (*C*, 1) ; (*D*, 2)}. En associant les points de différentes façons, montrer que *G* appartient aux droites (*KL*) et (*IJ*).
3. Montrer que *G* et *M* sont confondus, que *M* est aligné avec *I* et *J* puis donner la position de *M* sur (*IJ*).

Exercice n°28
Soit *ABC* un triangle et *I* le milieu de [*BC*]. Soit *G* le barycentre de (*A*, −1), (B, 2) et (C, 2).
1. Montrer que *G* appartient à la droite (*AI*).
2. Soit *H* le symétrique de *A* par rapport à *B*. Montrer que *C*, *G* et *H* sont alignés.
Exercice n°29
Soit *ABC* un triangle. On considère :
* le barycentre *I* de (*A* ; 2) et (*C* ; 1) ;
* le barycentre *J* de (*A* ; 1) et (*B* ; 2) ;
* le barycentre *K* de (*C* ; 1) et (*B* ; – 4).
1. Montrer que *B* est le barycentre de (*K* ; 3) et (*C* ; 1).
2. En déduire le barycentre de (*A* ; 2), (*K* ; 3) et (*C* ; 1) ;
3. Montrer que *J* est le milieu de [*IK*].

Exercice n°30
Soit *ABCDE* un pentagone tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$. Les diagonales (*BD*) et (*CE*) se coupent en *L*.
Soit *I* le milieu de [*AB*] et *J* celui de [*AE*] ; soit *K* le barycentre de (*A*, 2), (*B*, 1), (*C*, 1), (*D*, 1) et (*E*, 1).
1. Démontrer que les points *A*, *K* et *L* sont alignés.
2. Démontrer que $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{LA}$.
3. En déduire que le point *K* est le centre de gravité de *ABD* et de *ACE*.

Exercice n°31
Dans un triangle *ABC* on définit *I* le barycentre de (*B*, 2), (*C*, 1), *J* le barycentre de (*A*, 3), (*C*, 2) et *K* le barycentre de (*A*, 3) et (*B*, 4).
1. Faire une figure.
2. En considérant *G* le barycentre de (*A*, 3), (*B*, 4) et (*C*, 2), montrer que les droites (*AI*), (*BJ*) et (*CK*) sont concourantes en *G*.

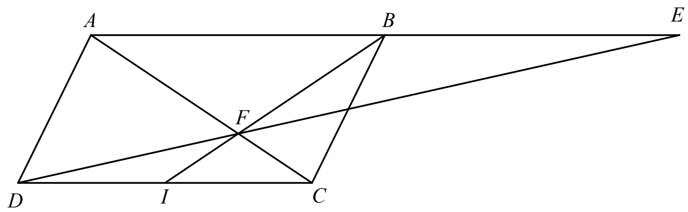
Exercice n°32
Soit *ABC* un triangle et *I*, *J* et *K* les points définis par : *I* est le milieu de [*AB*] ; $\overrightarrow{JC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JA}$; $\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{BC}$.
1. Déterminer les coefficients pour lesquels *I* est le barycentre de (*A*, *a*), (*B*, *b*), *J* celui de (*A*, *a*'), (*C*, *c*) et *K* celui de (*B*, *b*'), (*C*, *c*').
2. Démontrer que les droites (*AK*), (*BJ*) et (*CI*) sont concourantes en *G* barycentre de (*A*, 2), (*B*, 2) et (*C*, −3).

Exercice n°33
Soit *ABC* un triangle, *D* et *E* les points définis par $\overrightarrow{DB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$. *I* est le point d'intersection des droites (*AE*) et (*CD*) et *F* celui des droites (*BI*) et (*AC*).
On cherche à préciser la position du point *F* sur (*AC*).

1. Déterminer les coefficients pour lesquels *D* est le barycentre de (*A*, *a*), (*B*, *b*) et *E* celui de (*B*, *b*'), (*C*, *c*').
2. Préciser les coefficients pour lesquels *I* est barycentre de (*A*, α), (*B*, β) et (*C*, γ).
3. En déduire la position du point *F* sur la droite (*AC*).

Exercice n°34
Soit *ABC* un triangle, *I* le milieu de [*AC*] et *D* le symétrique de *B* par rapport à *C*. Les droites (*AD*) et (*BI*) se coupent en *G*. Enfin, *K* est le point d'intersection de (*AB*) et (*CG*). On veut prouver que *A* est le milieu de [*BK*].
1. On considère *D* et *I* comme barycentres de 2 sommets du triangle *ABC* munis de coefficients. Préciser ces coefficients.
2. Déterminer les coefficients pour lesquels *G* est barycentre de (*A*, α), (*B*, β) et (*C*, γ). Conclure.

Exercice n°35
Soit *ABCD* un parallélogramme, *I* le milieu de [*CD*] et *E* le symétrique de *A* par rapport à *B*. Les droites (*AC*) et (*IB*) se coupent en *F*. Le but de l'exercice est de montrer que les points *D*, *F* et *E* sont alignés.



Soit *G* le barycentre de (*A*, 1), (*E*, 1), (*D*, 2)et (*C*, 2).
1. Montrer que *G* est l'isobarycentre du triangle *BCD*. En déduire que les points *B*, *G* et *I* sont alignés.
2. Montrer que les points *A*, *G* et *C* sont alignés. En déduire que les points *G* et *F* sont confondus.
3. Démontrer que les points *D*, *F* et *E* sont alignés.

Exercice n°36
Soit *I* le centre d'un parallélogramme non aplati *ABCD*.
1. Déterminer des coefficients *b*, *c*, *d* pour lesquels *I* est le barycentre de {(*B*, *b*) ; (*C*, *c*) ; (*D*, *d*)}.
2. Quel est l'ensemble des points *G*, barycentres des points *A*, *B*, *C* et *D* affectés des coefficients λ, 2, $\lambda-1$ et $1-2\lambda$ où λ est un réel quelconque ?
3. Préciser la valeur de λ pour laquelle *G* est un point de (*AC*).

Exercice n°37
ABC est un triangle isocèle (*AB* = *AC*). *E* et *F* sont deux points du segment [*BC*]. Les parallèles à (*AB*) menées par *E* et *F* coupent (*AC*) en *G* et *H* respectivement. Les parallèles à (*AC*) menées par *E* et *F* coupent (*AB*) en *I* et *J* respectivement.
1. Montrer que *GH* = *IJ*.
2. Quelle condition doivent vérifier *E* et *F* pour que (*JG*) et (*IH*) soient parallèles ?

Exercice n°38
Soit *ABCD* un parallélogramme. On appelle *E* le barycentre de (*A*, 2) et (*B*, 1), *F* celui de (*B*, 2) et (*C*, 1), *G* celui de (*C*, 2) et (*D*, 1) et *H* celui de (*D*, 2) et (*A*, 1).
Faire une figure et montrer que *EFGH* est un parallélogramme.

Exercice n°39

Soit *I* le centre d'un parallélogramme non aplati *ABCD*.

1. Déterminer des coefficients *b*, *c*, *d* pour lesquels *I* est le barycentre de {(*B*, *b*) ; (*C*, *c*) ; (*D*, *d*)}.
2. Quel est l'ensemble des points *G*, barycentres des points *A*, *B*, *C* et *D* affectés des coefficients λ, 2, $\lambda-1$ et $1-2\lambda$ où λ est un réel quelconque ?
3. Préciser la valeur de λ pour laquelle *G* est un point de (*AC*).

Exercice n°40

ABCD est un tétraèdre. E et F sont les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[CD]$. I et J sont les points tels que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. H est le milieu de $[IJ]$. G est l'isobarycentre du tétraèdre.

a. Démontrer que H est le barycentre de $(A,2),(B,2),(C,1),(D,1)$
b. Montrer que E,H,F sont alignés ainsi que les points E,G,F.
c. Que peut-on dire des points E,H,G,F ?

Exercice n°41

Soit A, B, C trois points non alignés.

Soit D le barycentre de {(B ; 2) , (C ; 4)}, E le barycentre de {(C ; 4) , (A ; 1)}, F le barycentre de {(B ; 2) , (A ; 1)} et G le barycentre de {(A ; 1) , (B ; 2) , (C ; 4)}.

1. Construire les points D, E, et F.
2. Démontrer que les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes en G.
3. a) Montrer que B est barycentre de {(C ; – 2) , (D ; 3)}.
   b) Trouver les coefficients d et b tels que C soit barycentre de {(D ; d) , (B ; b)}.

Exercice n°42

ABC est un triangle. J et L sont définis par : $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AL}=3\overrightarrow{AC}$

La droite parallèle à (AC) menée par J coupe la droite (BC) en K.

1. Exprimer L comme barycentre des points A et C.
2. Exprimer K est comme barycentre de B et C.

Exercice n°43

Soit ABC un triangle équilatéral.

Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

Déterminer la nature de l'ensemble Γ.

Exercice n°44

Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère orthonormé du plan.

Soit A, B , C et D les points de coordonnées respectives (3 ; 3) , (–1 ; – 1) , (– 2 ; – 3) et (3 ; – 3).

1. Déterminer les coordonnées du point E tel que BCDE soit un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du barycentre G de {(A ; 2) , (B ; 1) , (C ; 1) , (D ; 1) , (E ; 1)}.
3. Soit L le centre du parallélogramme BCDE. Démontrer que les points A , G et L sont alignés.
4. a) Démontrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
   b) Que représente le point G pour le triangle ABD ?
5. Soit I le milieu de BC et J le milieu de DE. Montrer que G est l'isobarycentre du triangle AIJ.

Exercice n°45

Soit un triangle ABC tel que AC = 12, BA = 10 et CB = 8.

1. Construire le barycentre G de {(A ; 1) , (B ; 2) , (C ; 1)}.
2. Déterminer et représenter l'ensemble ξ_1 des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = AC$
3. Soit ξ_2 l'ensemble des points N tels que $\left\|\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\| = \left\|\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|$.

   a) Montrer que le point B appartient à ξ_2.

   b) Déterminer et représenter l'ensemble ξ_2.
4. Déterminer et représenter l'ensemble ξ_3 des points P tels que $\left\|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}\right\|$

Exercice n°46

Soit ABCD un parallélogramme.

Soit G le barycentre des points pondérés (A ; k) , (B ; k + 1) , (C , k – 1) et (D ; – 3 k + 1) où k ∈ IR

1) Le point G est-il défini pour toute valeur de k ?

2) Démontrer que le point A est le barycentre des points pondérés (B ; 1) , (C ; – 1) et (D ; 1).

Montrer que $\overrightarrow{AG} = 2k\overrightarrow{DB}$

3) Quel est le lieu du point G lorsque k décrit $\mathbb{R}$?

Exercice n°47

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = a et AC = 2a où a>0. I désigne le milieu de $[AC]$ et G le barycentre du système $\{(A;3)\ ;\ (B;-2)\ ;\ (C;1)\}$.

1. **(a)** Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère $ABIG$.

   (b) Exprimer en fonction de a les distances GA, GB et GC.
2. A tout point M du plan, on associe les nombres réels :

   $f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2$ et $h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2$.

   (a) Exprimer $f(M)$ en fonction de MG et de a.

   (b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $f(M) = 2a^2$.
3. Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $h(M) = \overrightarrow{MB}\cdot\vec{u} - 2a^2$.

   On désigne par (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que : $h(M) = -2a^2$.

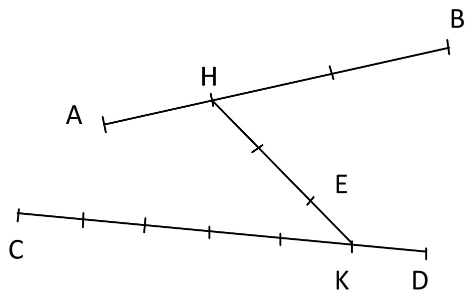
   (a) Vérifier que les points I et B appartiennent à (Δ).

   (b) Préciser la nature et construire (Δ).
4. (Δ) et (Γ) sont sécants en deux points E et F.

   Montrer que les triangles GEC et GFC sont équilatéraux.

Exercice n°48

Interpréter le point E comme le barycentre des points A, B , C et D avec des coefficients que l'on déterminera.



Exercice n°49

ABCD est un quadrilatère quelconque du plan.

Soit M, N , P et Q les points du plan tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DQ} = x\overrightarrow{DA}$ où x $\in$ [0 ; 1] .

On prend x = 0,25.

1) Construire l'isobarycentre G de A, B , C et D.

2) Démontrer que M est le barycentre de (A ; 0,75) , (B ; 0,25)

Qu'en est-il des points N, P et Q ?

3) Exprimer $\overrightarrow{GM}$ en fonction de $\overrightarrow{GA}$ et de $\overrightarrow{GB}$.

Exprimer de même $\overrightarrow{GN}$, $\overrightarrow{GP}$ et $\overrightarrow{GQ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{GD}$.

4) En déduire que G est l'isobarycentre des points M, N , P et Q.

5) Le résultat obtenu est-il conservé lorsque x a une valeur quelconque de l'intervalle [0 ; 1] ?

Exercice n°50

Soit ABC un triangle. (AB = 6 cm, AC = 7 cm et BC = 8 cm)

E est le barycentre de (A , 1) , (B , – 2) , (C , – 1)

F est le barycentre de (A , – 2) , (B , – 1) , (C , 1)

G est le barycentre de (A , – 1) , (B , 1) , (C , – 2)

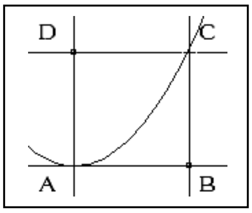
1) Construire les points E, F et G.
2) Démontrer que le centre de gravité H du triangle EFG est aussi le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice n°51

Soit ABCD un carré.

On munit le plan du repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$)

Soit P la représentation graphique dans ce repère de la fonction f définie sur [0 ; 1] par f (x) = x ².



1) Pour quelles valeurs du réel m, peut-on définir le point Gm barycentre de (A , 7) , (B , 8) , (C , 2) , (D , m) ?

2) Calculer les coordonnées (xGm ; yGm) de Gm en fonction de m.

3) Déterminer pour quelles valeurs de m, le point Gm est sur P.

Exercice n°52

ABC est un triangle. *I* et *G* sont définis par : $\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CI}$.

1. Exprimer *G* comme barycentre des points *A*, *B* et *C*.
2. La droite (*BG*) coupe le segment [*AC*] en un point *J*. Déterminer la position de *J* sur [*AC*].
3. Déterminer et tracer l'ensemble des points *M* du plan tels que : $\left\| 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI} \right\|$.

Exercice n°53

ABC est un triangle. *I* est milieu de [*AB*]. *J* et *L* sont définis par : $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AC}$.

La droite parallèle à (*AC*) menée par *J* coupe la droite (*BC*) en *K*.

1. Exprimer *I* comme barycentre de *A* et *B*, et *L* comme barycentre des points *A* et *C*.
2. Exprimer *K* est comme barycentre de *B* et *C*.
3. Démontrer que les points *I*, *K* et *L* sont alignés et préciser la position de ces trois points.

Exercice n°54

ABC est un triangle. (*les deux questions sont indépendantes*)

1. Montrer que la somme des carrés des médianes est égale aux $\frac{3}{4}$ de la somme des carrés des côtés.
2.
   a) Montrer que, pour tout point *M* du plan : $f + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$
   b) En déduire que les trois hauteurs sont concourantes.

Exercice n°55

Dans un plan, muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$,
on donne les points *A*(-1 ;3), *B*(1 ;1) et *C*(-4 ;0).

1. Calculer les coordonnées du point *G* barycentre de (*A* ;4) ; (*B* ;3) et (*C* ;5).
2. Soit l'expression *h*(*M*)= $f + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\,\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$.
   a) Calculer *h*(*G*).
   b) Exprimer *h*(*M*) en fonction de MG^2 et *h*(*G*).
   c) Déterminer l'ensemble des points *M* du plan tels que : *h*(*M*) = 18.

Exercice n°56

ABCD est un quadrilatère convexe. *I* est le milieu de [*AC*], *J* le milieu de [*BD*], *K* est le barycentre de (*A*, 1) et (*B*, 2) et *L* celui de (*C*, 1) et (*D*, 2). *M* est le milieu de [*LK*].

1. Montrez que le barycentre *G* de (*A*, 1) ; (*B*, 2) ; (*C*, 1) ; (*D*, 2) est le point *M* .
2. Montrez que $\overrightarrow{MI} = -2\overrightarrow{MJ}$ et conclure.

Exercice n°57

Partie A

Soit A, B et C trois points non alignés du plan.

1. Justifier que les systèmes $\{(A,3),(B,-2),(C,1)\}$ et $\{(A,3),(B,-2),(C,3),(C,-2)\}$ admettent un barycentre et qu'il s'agit du même barycentre que l'on notera G.
2. On note I le milieu de $[AC]$ et J celui de $[BC]$. Montrer que $G = \text{bar}\{(I,3),(J,-2)\}$.
3. On note K le milieu de $[AI]$. Montrer que les droites (BK) et (IJ) se coupent en G puis le placer sur une figure.
4. Monter que le quadrilatère $ABIG$ est un parallélogramme.

Partie B

1. a. Soit *M* un point quelconque du plan. Justifier que le vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant puis montrer que pour tout point M du plan, $\vec{V} = 2\overrightarrow{BI}$.
b. Déterminer et construire l'ensemble Γ des points *M* du plan tels que : $\|\vec{V}\| = \|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

2. a. Déterminer l'ensemble Δ des points *M* du plan tels que :

$$\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

b. Construire Δ .

Exercice n°58

Soit *ABC* un triangle quelconque, *O* le centre du cercle circonscrit à ce triangle (point d'intersection des médiatrices), et *G* son centre de gravité. Soit *H* le point défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

1. a. Soit *A*' le milieu de [*BC*]. Démontrer que $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

b. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires.

c. Déduire de a. et b. que *AH* est une hauteur du triangle *ABC*.

2. Démontrer que *H* est l'orthocentre du triangle *ABC*.
3. Soit *M* un point quelconque du plan.
a. Démontrer que $3\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.
b. Déduire des questions précédentes que les points *O*, *G* et *H* sont alignés.

Exercice n°59

ABC est un triangle de centre de gravité *G* (isobarycentre de *A*, *B*, *C*). On appelle *I* le milieu de [*BC*]. La parallèle à (*BC*) menée par *G* coupe (*AC*) en *E*.

1. Faire la figure et construire le point *D* défini par $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Trouver les coefficients *a* et *b* tels que *E* soit le barycentre de (*A*, *a*) ; (*C*, *b*) .
3. Montrer que *B* est le barycentre de (*A*, 1) ; (*D*, 1).
4. Montrer que *I* est le barycentre de (*A*, 1) , (*D*, 1) et (*C*, 2). En déduire que les points *I*, *D* et *E* sont alignés. Préciser la position de *I* sur [*DE*].

Exercice n°60

Dans un triangle *ABC*, soit *E* le point défini par $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et soit *A'* le milieu de [*BC*].

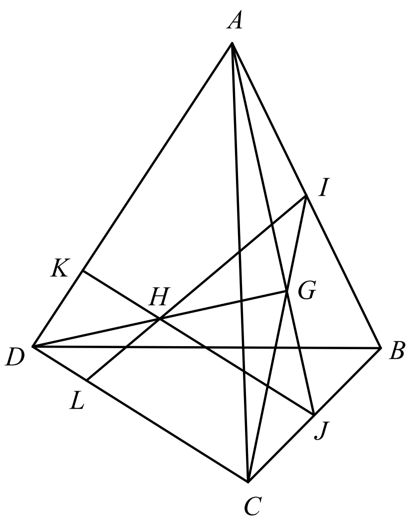
1. Exprimer le point *E* comme barycentre des points *A* et *B*.
2. Exprimer le point *A'* comme barycentre des points *B* et *C*.
3. On considère le point *I* barycentre de (*A*, 2), (*B*, 1) et (*C*, 1).
a. Montrer que *I* est le milieu de [*AA'*].
b. Montrer que les points *I*, *E* et *C* sont alignés.

Exercice n°61

ABC est un triangle, O est le milieu de $[BC]$, J celui de $[AC]$, I est le point tel que $3\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$ et K le point tel que $3\overrightarrow{KI}=-2\overrightarrow{KJ}$.
Le but de cet exercice est de démontrer que les points A, K et O sont alignés.
1. Exprimer I comme barycentre de A et B ; exprimer J comme barycentre de A et C puis exprimer K comme barycentre de I et J.
2. Construire les points O, I, J et K.
3. Montrer que les points A, K et O sont alignés.

Exercice n°62

ABC est un triangle, *J* est le milieu de [*AC*], *K* celui de [*JB*], et *I* le point tel que $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
On se propose de démontrer de deux façons différentes que les points *C*, *K* et *I* sont alignés.
1. A l'aide du calcul vectoriel.
a. Montrer que $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.
b. Montrer que $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
c. En déduire que *C*, *K* et *I* sont alignés.
2. A l'aide de barycentres.
a. Exprimer le point *I* comme barycentre de *A* et *B*.
b. En considérant le barycentre de (*A* ; 1), (*B* ; 2) et (*C* ; 1), montrer que *C*, *K* et *I* sont alignés.



Exercice n°63

Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$, J celui de$[BC]$, K le barycentre de $(A, 1)$, $(D, 3)$ et L celui de $(C, 1)$, $(D, 3)$.

Les droites (IC) et (AJ) se coupent en G.

Démontrer que les droites (IL) et (JK) sont sécantes en un point H, milieu du segment $[DG]$.

Exercice n°64

Dans un tétraèdre $ABCD$ on considère E le barycentre de $(A, -1)$, (B, 2) et (C, −3) ; F le milieu de $[ED]$, G le barycentre de $(A, 1)$ et $(D, 2)$ et H celui de $(B, 2)$ et $(C, -3)$.

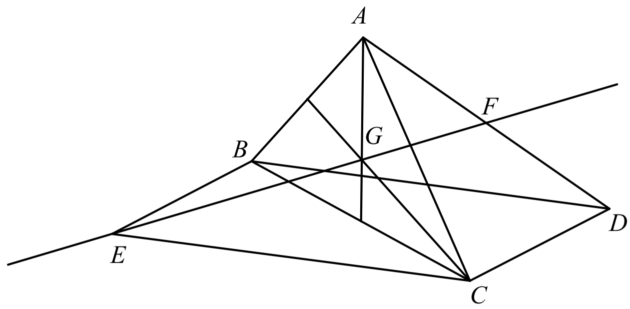
1. Démontrer que F, G et H sont alignés.
2. Démontrer que B, C, F et G sont coplanaires.

Exercice n°65

$ABCD$ est un tétraèdre.

F est le milieu de $[AD]$, G est le centre de gravité de ABC, E est le point du plan BCD tel que $BDCE$ est un parallélogramme.

1. Vérifier que D est le barycentre de
   $(B, 1)$, $(C, 1)$ et $(E, -1)$.
2. Démontrer l'alignement de E, F et G.



Exercice n°66

$ABCD$ est un tétraèdre. On définit les points I, J, K et L par : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$.

Soient M le milieu de $[AC]$ et N celui de $[BD]$.

1. Démontrer que les droites (IK), (JL) et (MN) sont concourantes en un point G que l'on déterminera.
2. Soit P le milieu de $[CN]$. Démontrer que la droite (AP) passe par G et préciser la position de G sur $[AP]$.
3. La droite (BG) coupe la face ACD en Q. Démontrer que Q est sur le segment $[DM]$ et préciser sa position.

Exercice n°67

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$. Soit I le milieu du segment $[AB]$ et K celui du segment $[CD]$.

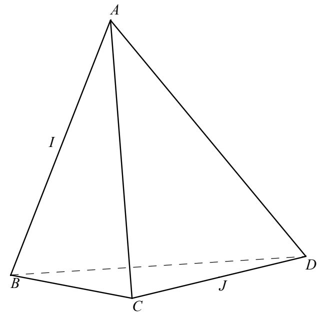
Soit L le point défini par $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et J celui défini par $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

Soit G le barycentre de $\{(A, 3) ; (B, 3) ; (C, 1) ; (D, 1)\}$.

1. Déterminer le barycentre de$\{(A, 3) ; (D, 1)\}$ puis celui de $\{(B, 3) ; (C, 1)\}$.
2. En associant les points A, B, C et D de deux façons différentes, montrer que G appartient aux droites (IK) et (JL).
3. En déduire que I, J, K et L sont coplanaires.

Exercice n°68

On considère le tétraèdre *ABCD* ; on note *I* le milieu de [*AB*] et *J* celui de [*CD*].



1. a. Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés {(*A*, 1) ; (*B*, 1) ; (*C*, –1) ; (*D*, 1)}.
Exprimez $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placez *I*, *J* et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).
b. Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés {(*A*, 1) ; (*B*, 1) ; (*D*, 2)}. Démontrez que G_2 est le milieu du segment [*ID*]. Placez G_2.
c. Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme. En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et *J*.
2. Soit *m* un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés

{(*A*, 1) ; (*B*, 1) ; (*C*, *m* – 2) ; (*D*, *m*)}.

a. Précisez l'ensemble *E* des valeurs de *m* pour lesquelles le barycentre G_m existe.
Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel *m* appartient à l'ensemble *E*.
b. Démontrez que G_m, appartient au plan (*ICD*)
c. Démontrez que le vecteur $m\,\overrightarrow{JG_m}$ est constant.
d. En déduire l'ensemble *F* des points G_m lorsque *m* décrit l'ensemble *E*.

Exercice n°69

On donne un rectangle *ABCD* du plan dont les côtés [*AB*] et [*BC*] ont pour longueurs respectives *a* et *b* .
Pour tout réel *m* non nul, on note G_m le barycentre du système de points pondérés

{(*A*, *m*) ; (*B*, −1) ; (*C*, 1)}.

1. Est-ce que G_m est sur la droite (*BC*) ?
2. Quel est l'ensemble des points *M* du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{a^2+b^2}$?
3. Quel est l'ensemble des points *M* du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=a$?
4. Est-ce que l'aire du triangle G_mBC dépend de *m* ?

Exercice n°70

ABCD est un carré de centre *O*, de côté *a*. *G* est le centre de gravité du triangle *ABC*.
1. Montrer que le barycentre *H* du système {(*A*, 1) ; (*B*, 1) ; (*C*, 1) ; (*D*, 5)} est le milieu du segment [*OD*].
2. Calculer, en fonction de *a*, la distance *OD*.
3. a. Déterminer et construire l'ensemble *E* des points *M* du plan vérifiant :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+5\overrightarrow{MD}\right\|=2a\sqrt{2}\ .$$

b. Sans nouvelle démonstration, donner la position du barycentre *K* du système {(*A*, 1) ; (*B*, 5) ; (*C*, 1) ; (*D*, 1)}.
c. Déterminer et construire l'ensemble *F* des points M du plan vérifiant :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+5\overrightarrow{MD}\right\|\ .$$

4. a. Calculer, en fonction de *a*, la distance *DG*.
b. Déterminer et construire l'ensemble des points *M* du plan vérifiant :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MD}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|\ .$$

Exercice n°71

On se donne dans le plan un triangle *ABC* rectangle en *A*, tel que *AB* = 2*a* et *AC* = *a* où *a* est une longueur donnée.

1. Déterminer et construire l'ensemble E des points *M* du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|.$$

2. On désigne par *H* le point du plan tel que $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

a. Montrer que *H* est le barycentre des points *A*, *B* et *C* affectés de coefficients que l'on déterminera.
b. On considère l'ensemble des points du plan tels que $-3MA^2+MB^2+4MC^2=k$. Pour quelle valeur de *k* cet ensemble contient-il le point A ? Préciser l'ensemble alors obtenu et construisez le.

Exercice n°72

ABC est un triangle.

1. Construire le barycentre *G* de (*A*, 1) ; (*B*, 2) et (*C*, 3) ; *M* étant un point quelconque du plan, exprimer $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|$ en fonction de *MG*.
2. Construire le barycentre *K* de (*A*, 8) ; (*B*, −1) et (*C*, −1) ; *M* étant un point quelconque du plan, exprimer $\left\|8\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ en fonction de *MK*.
3. Quel est l'ensemble des points *M* tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|8\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$? Le construire.
4. Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$. Soit Γ l'ensemble des points *M* tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$. Vérifier que *C* appartient à Γ. Déterminer et construire Γ.

Exercice n°73

Soit *ABCD* un rectangle tel que *AB* = 3 et *BC* = 4.

1. Déterminez les coefficients α, β, γ tels que *D* soit le barycentre du système (*A*, α) ; (*B* ; β) et (*C* ; γ).
2. Déterminez l'ensemble des points *M* tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$.

Exercice n°74

Soit *ABC* un triangle isocèle du plan tel que *AB* = *AC*. On note *I* le milieu de [*BC*] et on donne *AI* = 4*a*, *BC* = 2*a*, *a* réel strictement positif. Pour la figure on prendra *a* = 2 cm.

1. On note *G* le barycentre du système $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$. Déterminer et construire l'ensemble des points *M* du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$.
2. *k* étant un nombre réel, déterminer l'ensemble des points *M* du plan tels que $2MA^2+MB^2+MC^2=ka^2$ (on discutera suivant les valeurs de *k*).
3. On prend *a* = 1 et on construit un repère du plan de centre *I*, de sorte que les vecteurs de base soient $\vec{i}=\overrightarrow{IC}$ et $\vec{j}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$.

Déterminer les coordonnées de *A*, *B*, *C* et *G*. Retrouver alors les réponses du 1. et du 2.

Exercice n°75

On se donne dans le plan un triangle *ABC* rectangle en *A*, tel que *AB* = 2*a* et *AC* = *a* où *a* est une longueur donnée.

1. Déterminer et construire l'ensemble E des points *M* du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|.$$

2. On désigne par *H* le point du plan tel que $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

a. Montrer que *H* est le barycentre des points *A*, *B* et *C* affectés de coefficients que l'on déterminera.
b. On considère l'ensemble des points du plan tels que $-3MA^2+MB^2+4MC^2=k$. Pour quelle valeur de *k* cet ensemble contient-il le point A ? Préciser l'ensemble alors obtenu et construisez le.

Exercice n°76

A, B et C sont trois points non alignés tels que $AB = AC = 5$ et $BC = 4$. I est le milieu de [BC]. J est défini par $\overrightarrow{BJ} = -2\overrightarrow{BC}$.

G est le barycentre de (A ; 1), (B ; 3) et (C ; –2).

1. Exprimer le point J comme barycentre des points B et C.

2. a. Montrer que G est le barycentre des points A et J.

b. En déduire la position de G sur le segment [AJ].

3. a. Exprimer, pour tout point M du plan, le vecteur $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.

b. Exprimer alors en fonction d'une seule distance la norme $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$.

c. Déterminer l'ensemble Γ des points M tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

d. Tracer l'ensemble Γ .

4. a. Déterminer l'ensemble Δ des points M tels que : $(3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{MA} = 0$.

b. Justifier que le point I appartient à l'ensemble Δ puis tracer l'ensemble Δ .

5. a. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BJ}$.

b. En déduire $\cos\widehat{ABJ}$.

6. K est le milieu de [AB]. Calculer la longueur JK.

Exercice n°77

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 8$ cm. On appelle I le milieu de [AB].

1. a. Construire le barycentre G des points (A, 5) et (B, 3).

b. Déterminer l'ensemble (E) des points du plan tels que $\left\|5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\| = 16$. Tracer cet ensemble (E).

2. a. Construire le barycentre H des points (A, 5) et (B, – 3).

b. Déterminer l'ensemble Γ des points du plan tels que $\left(5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(5\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right) = 0$. Tracer cet ensemble Γ .

Exercice n°78

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = a$ et $AC = 2a$.

I désigne le milieu de [AC] et G est le barycentre du système {(A ; 3) ; (B ; 2) ; (C ; 1)}.

1. Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère $ABIG$. Exprimer en fonction de a les distances GA, GB et GC.

2. À tout point M du plan, on associe le nombre réel :

$$f(M) = 3MA^2 \ 2MB^2 + MC^2.$$

a. Exprimer $f(M)$ en fonction de MG et de a.

b. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $f(M) = 2a^2$.

3. À tout point M du plan, on associe maintenant le nombre réel :

$$h(M) = 3MA^2 \ 2MB^2 \ MC^2.$$

a. Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{U}$ non nul tel que : $h(M) = \ \overrightarrow{MB}.\vec{U} \ 2a^2$.

b. On désigne par (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que : $h(M) = 2a^2$.

Vérifier que les points I et B appartiennent à (Δ), préciser la nature de cet ensemble. Construire (Δ).

4. (Δ) et (Γ) sont sécants en deux points E et F. Montrer que les triangles GEC et GFC sont équilatéraux.

Exercice n°79

ABC est un triangle du plan tel que $AB = 10\ cm$, $BC = 12\ cm$ et $AC = 14\ cm$ et I, J et K sont tels que :

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$. On note *L* le milieu de $[AB]$.

1. Faire un schéma et construire *I*, *J*, *K* et *L*.
2. Exprimer :
   I comme barycentre de *A* et *B* ;
   J comme barycentre de *C* et *B* ;
   K comme barycentre de *C* et *A*.
3. En utilisant *H* le barycentre de $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$ où α, β et γ sont des réels que vous choisirez convenablement, montrer que les droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes.
4. Question de cours : Montrer que si *a*, *b* et *c* sont des réels de **somme nulle** alors le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant, c'est-à-dire ce vecteur ne dépend pas du point *M*.
2. Déterminer et représenter les ensembles de points suivants avec des couleurs différentes :
a. Ensemble (ξ_1) des points *M* du plan tels que $\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\| = 45$.
b. Ensemble (ξ_2) des points *M* du plan tels que $\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\| = \|4,5\overrightarrow{MA} + 4,5\overrightarrow{MB}\|$.
c. Ensemble (ξ_3) des points *M* du plan tels que $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.
d. Ensemble (ξ_4) des points *M* du plan tels que $\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\| = \|-3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}\|$. Pour construire (ξ_4), on déterminera un point de la figure appartenant à (ξ_4).

Exercice n°80

Soit *ABCD* un rectangle.

1. Déterminer l'ensemble des points *M* du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\|$.

Pour cela, on introduira *I* le milieu du segment [*AB*] et *K* le barycentre de (*C*, 3) et (*D*, −1).

2. Déterminer l'ensemble des points *M* du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$.

Vérifier au préalable que *A* et *B* sont dans cet ensemble.

Exercice n°81

Soit *A* et *B* deux points distincts du plan.

1. Déterminer l'ensemble des points *M* du plan tels que ($\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$).($\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$) = 0
- en développant le produit scalaire.
- en introduisant le milieu *I* de [*AB*].
2. Déterminer l'ensemble E des points *M* du plan tels que ($\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$).($\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}$) = 0
On pourra introduire *I* le barycentre de (*A*, 1), (*B*, 2) et *J* le barycentre de (*A*, 1), (*B*, −2).
3. Démontrer que *M* appartient à E si et seulement si *MA* = 2*MB*.

Exercice n°82

ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm.

1. Construire *G* le barycentre de (*A*, 1), (*B*, −1) et (*C*, 1) et prouver que *ABCG* est un parallélogramme.
2. Déterminer l'ensemble des points *M* du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.
3. Vérifier que le milieu de [*AC*] appartient à cet ensemble et le tracer.

Exercice n°83

ABC est un triangle équilatéral de côté *a*.

Soit E l'ensemble des points *M* du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

1. Prouver que le point *B* appartient à E.
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ est indépendant du choix de *M*.
3. Soit *G* le barycentre de (*A*, 1), (*B*, −4) et (*C*, 1). Prouver que *GM* = $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ et en déduire la nature de E puis tracer E.

Exercice n°84

Soit *ABC* un triangle, *I* le barycentre de (*B*, 1), (*C*, 2), *J* celui de (*A* , −3), (*C*, 2) et *K* celui de (*B*, 1), (*A*, −3). Démontrer que les droites (*AI*), (*BJ*) et (*CK*) sont parallèles.

Exercice n°85

Soient *A*, *B*, *C* et *D* les points de coordonnées respectives (3 ; 3), (−1 ; −1), (−2 ; −3) et (3 ; −3).

1. Déterminer les coordonnées du point *E* tel que *BCDE* soit un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du barycentre *G* des points (*A*, 2), (*B*, 1), (*C* , 1), (*D*, 1) et (*E*, 1).
3. Soit *L* le centre du parallélogramme *BCDE*.

a. Démontrer que *A*, *G* et *L* sont alignés.

b. Démontrer que $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}=\vec{0}$.

c. Que représente le point *G* pour le triangle *ABD* ? et pour le triangle *AEC* ?

4. a. Déterminer les coordonnées de *I* milieu de [*AB*] et *J* milieu de [*AE*].

b. Démontrer l'alignement de *I*, *G* et *D* et celui de *C*, *G* et *J*.

Exercice n°86

Soit *ABC* un triangle quelconque et *A'*, *B'* et *C'* les milieux respectifs de [*BC*], [*AC*] et [*AB*]. Soit *O* le centre du cercle circonscrit à ce triangle et *G* son centre de gravité. Soit *H* le point défini par

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

1. a. Démontrer que $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA'}$.

b. Démontrer alors que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires.

c. En déduire que (*AH*) est une hauteur du triangle *ABC* puis que *H* est l'orthocentre du triangle *ABC*.

2. a. Soit *M* un point quelconque du plan. Démontrer que $3\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

b. Déduire des questions précédentes que les points *O*, *G* et *H* sont alignés. La droite formée par ces trois points est appelée *droite d'Euler*.

3. Soient *A''*, *B''* et *C''* les symétriques respectifs de *A*, *B* et *C* par rapport à *O*. Soit *P* le milieu de [*HA''*].

a. Montrer que $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OA''}=2\overrightarrow{OA'}$ .En déduire que *P* = *A*.

b. Déterminer les symétriques de *H* par rapport à *A'*, *B'* et *C'*.

c. Montrer que ces points se trouvent sur le cercle circonscrit au triangle.

Exercice n°87

Soit *ABC* un triangle ayant ses angles aigus et *A'*, *B'* et *C'* les pieds respectifs des hauteurs issues de *A*, *B* et *C*.

1. Prouver que $\frac{\tan\widehat{B}}{\tan\widehat{C}}=\frac{A'C}{A'B}$.
2. En déduire que *A'* est le barycentre de (*B*, tan $\widehat{B}$) et (*C*, tan $\widehat{C}$).
3. Quel est le barycentre du système de points (*A*, tan $\widehat{A}$), (*B*, tan $\widehat{B}$) et (*C*, tan $\widehat{C}$) ?

Exercice n°88
On considère un triangle isocèle *ABC* de côtés *BC* = 2*a*, *AC* = *AB* = 3*a*, *a* étant un réel strictement positif. On note *A*' le milieu de [*BC*] et *H* l'orthocentre du triangle.

1. Soit α une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Montrer que $\cos\alpha = \frac{7}{9}$.

2. Soit *B*' le projeté orthogonal de *B* sur la droite (*AC*). Calculer $\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$. En déduire deux réels *u* et *v* tels que *B*' soit le barycentre du système $\{(A,u);(C,v)\}$.

3. En s'aidant de la deuxième question, déterminer trois réel *a*, *b*, *c* tels que *H* soit le barycentre du système $\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$.

Exercice n°89
Soit *ABC* un triangle avec *AB* = *c*, *AC* = *b* et *BC* = *a*. Soient *A*', *B*' et *C*' les pieds respectifs des bissectrices intérieures issues de *A*, *B* et *C*.
On rappelle que tout point de la bissectrice (*AA*') est équidistant des côtés (*AB*) et (*AC*).
1. Donner deux expressions de l'aire du triangle *AA*'*B*.
2. Donner deux expressions de l'aire du triangle *AA*'*C*.
3. En déduire l'égalité $\frac{A'C}{A'B} = \frac{b}{c}$.
4. En déduire que *A*' est le barycentre de (*B*, *b*) et (*C*, *c*).
5. Quel est le barycentre du système de points (*A*, *a*), (*B*, *b*) et (*C*, *c*) ?

Exercice n°90
Soit ABC un triangle, I, J et K les points tels que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ et I le barycentre de {(B,1) ;(C,2)}.

1) Construire les points I, J et K.
2) a) Ecrire J comme de A et C.
   b) Ecrire K comme barycentre de A et B.
3) Soit le point D barycentre de {(A,2) ;(B,3) ;(C,3)}.
   a) Montrer que D appartient aux droites (CK) et (BJ).
4) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $AM^2 + CM^2 = \frac{5}{8}AC^2$.
   a) Vérifier que J appartient à (E).
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (E).

c) Construire (E).

Exercice n°91
Soit ABCD un parallélogramme. On définit les points P et Q par :

- $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
- Q est le symétrique du milieu de [AD] par rapport à A.
  Montrer que les points P, Q et C sont alignés.

Exercice n°92
Soit ABC un triangle. A' ; B' ; C' les milieux des cotés et M un point donné.
On note A_1 ; B_1 ; C_1 les symétriques de M par rapport à A' ; B' ; C'
On désigne par M' le barycentre de pondérés (A ;1), (B ;1), (C ;1) et (M, -1)
Montrer que les droites (AA_1) , (BB_1) et (CC_1) sont concourantes au point M'

Exercice n°93

On considère un triangle ABC, A' ; B' ; C' les milieux des cotés et P le point du segment [AB] tel que

$AP = \frac{1}{3}AB$

Montrer que les droites (AA') , $(B'C')$, (CP) sont concourantes au point

Exercice n°94

Soit ABC un triangle

A' le barycentre de (B,2) et (C,-3)

B' le barycentre de (C,-3) et (A,1)

a) Démontrer que les droites (AA') et (BB') sont parallèles.

b) C' est le barycentre de (A,a) et (B,b). déterminer les valeurs de a et b telles que (AA') et (CC') soient parallèles.

Exercice n°95

Soit M_k le barycentre des points pondérés (A ; k) , (B ; $k+1$) et (C ; k).

a) Démontrer que $\overrightarrow{BM_k} = k(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})$

b) Quel est le lieu des points M_k lorsque décrit $\mathbb{R}$.

Exercice n°96

Soit I le milieu du segment [BC]. On appelle G le barycentre des points pondérés (A ;-1), (B ;2), et (C ;2).

a) Calculer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$

b) Soit H le symétrique du point A par rapport au point B. Démontrer que les points C, G et H sont alignés.

Exercice n°97

Soit un k nombre réel.

G_k barycentre des points pondérés (A;-2) , (B ; $k+1$) et (C ; $-k$). $k \in$ Déterminer le lieu des points G_k lorsque k décrit $\mathbb{R}$.

Exercice n°98

Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par I le milieu de [BD]. Soit M le barycentre des points pondérés (A ; 2α), (B ; $-2\alpha - 2\beta + 1$), (C ; 2β) et (D ; 1)

a) Le point M existe t –il ?

b) Quel est le lieu du point M lorsque α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Exercice n°99

Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(1\ ;\ 1)$ $B(1\ ;\ -1)$. C est le point tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$.

A chaque nombre $m \neq -3$, on associe le barycentre G_m des points pondérés $(A;1)$, $(B;2)$,(C,m)

a) Pourquoi m doit être différent de -3 ? Calculer les coordonnées du point C.

b) Construire les points G_1 , G_2 , $G_{-\frac{1}{4}}$

c) Exprimer les coordonnées x_m et y_m du point G_m en fonction de m

d) Démontrer que pour n'importe quelle valeur de m, $m \neq -3$, le point G_m appartient à la droite d d'équation $x+3y=0$

e) Expliquez pourquoi le point G_m ne pourra jamais être confondu avec le point C de la droite d

Exercice n°100

soit ABC un triangle quelconque. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que
$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

Exercice n°101

ABC est un triangle. A chaque point M de l'espace, on associe les vecteurs $\vec{u} = 7\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}$
$\vec{v} = 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$
Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Exercice n°102

ABC est un rectangle du plan, les diagonales [AC] et [BD] ont pour longueur a.

1) m est un réel non nul. G_m est le barycentre du système $\{(A,m);(B,-1);(C,1)\}$
   a. Préciser la position de G_1
   b. Quel est l'ensemble $\mathcal{E}$ des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?
2) Quel est l'ensemble des points $\mathcal{F}$ des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = a$?
3) Quel est l'ensemble des points $\mathcal{H}$ des points M tels que $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$

Exercice n°103

Soit ABC un triangle équilatéral de coté de longueur a. Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que
$\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

a) Prouver que le point B est un point de Γ
b) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ est indépendant du choix du point M.
c) Soit G le barycentre de $\{(A;1),(B;-4),(C;1)\}$. Prouver que $GM = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et en déduire la nature de l'ensemble Γ.
d) Tracer l'ensemble Γ.

Exercice n°104

Soit ABCD un carré de coté de longueur a. Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que
$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = a$

a) Prouver que les point A et Cs sont des points de Γ
b) Prouver que les point B et D ne sont pas des points de Γ
c) Identifier le barycentre de $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$
d) Démontrer qu'un point M appartient à l'ensemble Γ si et seulement si $DM = a$
e) En déduire la nature de l'ensemble Γ. Tracer Γ.

Exercice n°105

ABCD est un carré de centre O. soit Γ l'ensemble des points du plan tels que :
$\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right\|$

a) Prouver que les points O, B et D sont des points de Γ.

b) Prouver que les points A et C ne sont pas des points de l'ensemble Γ
c) Identifier les barycentres respectifs des systèmes $\{(B;1),(C;-1),(D;1)\}$ et $\{(A;1),(B;-1),(D;-1)\}$
d) Démontrer qu'un point M appartient à l'ensemble Γ si et seulement si $MA = MC$. En déduire la nature de l'ensemble Γ. Tracer Γ.

Exercice n°106

Soit ABCD un parallélogramme.

Soit I le milieu du segment [CD] et E le symétrique du point A par rapport au point B. les droites (AC) et (IB) se coupent en F. le but de l'exercice est de montrer que les points D, F et E sont alignés.

1) Soit G le barycentre des points pondérés (A ;1), (E ;1), (D ;2), (C ;2)
   a. Démontrer que le point G est l'isobarycentre du triangle BDC.
   b. En déduire que les points B, G et I sont alignés.
2)
   a. Démontrer que les points A, G et C sont alignés.
   b. En déduire que les points G et F sont confondus.
   c. Démontrer que les points D, F et E sont alignés.

Exercice n°107

1) Déterminer l'ensemble E_1 des points M tels que $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires.

2) Déterminer l'ensemble E_2 des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\| = AB$.

3) Déterminer l'ensemble E_3 des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\| = 4MA$

Exercice n°108

Soit ABCD un parallélogramme. Soit G le barycentre des points pondérés (A ; k), (B ; $k+1$), (C ; k-1), et (D ; $-3k+1$) avec k nombre réel.

1) Le point G est t-il défini pour toute valeur de k ?
2) Démontrer que le point A est le barycentre des points pondérés (B ;1), (C ;-1) et (D ;1). Démontrer que $\overrightarrow{AG} = 2k\overrightarrow{AB}$
3) Quel est le lieu du point G lorsque k décrit $\mathbb{R}$

Exercice n°109

Soit ABCD un parallélogramme.

Soit I le milieu du segment [BC] et E le point défini par $\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{AB}$ avec k réel tel que $k > 0$

Les droites (ID) et (BC) se coupent en un point F. les droite (FE) et (BC) se coupent en un point G.

1) Prouver que le point B est le barycentre des points pondérés A et E, avec des coefficients que l'on déterminera.
2) Soit H le symétrique du point D par rapport au point C.
   a. Démontrer que le point I est le milieu du segment [AH]
   b. En déduire que le point F est le centre de gravité du triangle ADH.
3) .
   a. Démontrer que le point G est le barycentre des points pondérés (A ; k) , (E ;1), (D ; k) et (H ; k).
   b. Démontrer que le point G est le barycentre des points pondérés B et C avec des coefficients que l'on déterminera.

c. En déduire la valeur du rapport $\dfrac{GC}{GB}$

Exercice n°110

1) Construire le barycentre G de (A,1) et (B,3)

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

Exercice n°111

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = a$ et $AC = 2a$ où $a > 0$. I désigne le milieu de $[AC]$ et G le barycentre du système $\{(A; 3)\ ;\ (B; -2)\ ;\ (C; 1)\}$.

5. **(a)** Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère $ABIG$.
   (b) Exprimer en fonction de a les distances GA, GB et GC.
6. A tout point M du plan, on associe les nombres réels :
   $f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2$ et $h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2$.
   (c) Exprimer $f(M)$ en fonction de MG et de a.
   (d) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $f(M) = 2a^2$.
   (e) Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $h(M) = \overrightarrow{MB}\cdot\vec{u} - 2a^2$.
7. On désigne par (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que : $h(M) = -2a^2$.
   (c) Vérifier que les points I et B appartiennent à (Δ).
   (d) Préciser la nature et construire (Δ).
8. (Δ) et (Γ) sont sécants en deux points E et F.
   Montrer que les triangles GEC et GFC sont équilatéraux.

Exercice n°112

Soit A et B deux points du plan ; O est le milieu de $[AB]$.

1. Démontrer que , pour tout point M du plan , $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$
2. Dans cette question , on donne $AB = 4$ cm et C_k l'ensemble des points M u plan tel que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$ où $k \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow OM^2 = 4 + k$.
   (b) Etudiez C_k suivant les valeurs de k.
3. Déterminer et représenter l'ensemble C_k pour $k = 5$.

Exercice n°113

ABC est un triangle tel que AB=6cm, BC=5cm et AC=4cm.

Le point K est le barycentre des points pondérés (A, 3) et(B, 1).

Le point G est le barycentre des points pondérés (A, 3),(B, 1) et (C, -1).

1) Construire le triangle ABC et le point K.
2) Démontrer que les droites (AG) et (BC) sont parallèles et construire le point G.
3) Soit (C) l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 68$

3.1) Soit I le milieu de [AB]. Montrer que pour tout point M du plan, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

3.2) En déduire que (C) est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice n°114

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que AB = AC = 6 cm. Soit G le point du plan tel que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Soit Q le point du plan tel que $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$. On note P le point de rencontre des droites (AG) et (BC).

1) Faire une figure que l'on complètera progressivement. Placer G et Q.
   Ecrire Q comme barycentre des points A et B.
   Ecrire G comme barycentre des points A, B et C.
2) Démontrer que les points G, Q et C sont alignés.
3) Ecrire P comme barycentre de B et C.
4) A chaque point M du plan, on associe les vecteurs $\vec{U} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et $\vec{V} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.
   a°) Justifier que $\vec{U} = 3\overrightarrow{GM}$ et $\vec{V} = 4\overrightarrow{PA}$.
   b°) Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$.
   c°) Déterminer l'ensemble (D) des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient colinéaires de sens contraires.
5) On note (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que MA² -3MB² -MC² = -144 .
   a°) Vérifier que le points A appartient à (Γ). Calculer GA² et GC².
   (On pourra utiliser la propriété de Pythagore)
   b°) Déterminer et dessiner (Γ).

Exercice n°115

Soit ABC un triangle et M un point du plan. On définit dans le plan les applications f et g par : $f(M) = \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{CM}$ et $g(M) = \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{CM}$

1. Construire le point G barycentre des points pondérés (A ;1) , (B ;2) , (C ;3)
2. Exprimer $f(M)$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{GM}$
3. Montrer que g(M) est un vecteur constant.
4. a) Vérifier que g(C) = f(C)

b) Déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M tel que $\|f(M)\| = \|g(M)\|$.

Exercice n°116

Le plan est muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soient E (1 ; -3) et F (1 ; 3) deux points du plan.

1. Déterminer les coordonnées du point J tel que E soit le symétrique de F par rapport à J.
2. a. Montrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = MJ^2 - \frac{EF^2}{4}$
   b. En déduire la nature de (Γ), ensemble des points du plan tels que : $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 7$
   c. Construire (Γ) dans $(O;\vec{i},\vec{j})$
3. Donner une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$
4. (Γ) rencontre l'axe (ox) en deux points A et B et la parallèle à (oy) passant par J en deux points C et D.

a. Donner les coordonnées des points A, B, C et D. 1 pt
b. Quelle est la nature exacte du quadrilatère ACBD ?
c. Calculer son aire.

Exercice n°117

ABC est un triangle équilatéral de côté 4. Soit D un point du plan tel que : $3\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{O}$

1. Démontrer que D est le barycentre des points A, B et C affectés de coefficients que l'on déterminera.
2. Soit I le milieu de $[AC]$; démontrer que D est le barycentre de B affecté de coefficients que l'on déterminera et déduire que D appartient à la médiatrice de $[AC]$
3. Soit (C) l'ensemble des points M tels que $2MA^2-MB^2+2MC^2=16$
   (a) Verifier que le centre de gravité O de ABC appartient à (C)
   (b) En déduire la nature et les éléments caractériqtiques de (C).

Exercice n°118

Soit ABC un triangle. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ et par P le point défini par $\overleftarrow{AP}=\frac{1}{3}\overleftarrow{AB}$. Démontrer que les droites (AA'), $(B'C')$ et (CP) sont alignés.

Soit A et B deux points tels que $AB=4cm$

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $MA^2-MB^2=2AB^2$
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $MA\sqrt{2}=MB$
3. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $MA^2+MB^2=44$

ABC est un triangle. D est le milieu du segment $[AB]$.

On pose $E=bar\{(A,3);(C,-1)\}$ et $F=bar\{(B,3);(C,-1)\}$. Montrer que D , E et F sont alignés.

Exercice n°119

ABCD est un carré de côté de longueur a et de centre O.

1. Soit (Γ_1), l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=a.$

a. Prouver que, A et C sont des points de (Γ_1).

b. Prouver que, B et D ne sont pas des points de (Γ_1).

c. Identifier le barycentre de : {(A, 1),(B, -1),(C, 1)}.

d. Démontrer qu'un point M appartient à l'ensemble (Γ_1) si et seulement si $DM=a$.

e. En déduire la nature de l'ensemble (Γ_1). Tracer (Γ_1).

2. Soit (Γ_2), l'ensemble des points M du plan tels que :

$\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\|.$

a. Prouver que, O,B et D sont des points de (Γ_2).

b. Prouver que, A et C ne sont pas des points de (Γ_2).

c. Identifier les barycentres respectifs des systèmes :

{(B, 1),(C, -1),(D, 1)} et {(A, 1),(B, -1),(D, -1)}.

d. Démontrer qu'un point M appartient à l'ensemble (Γ_2) si et seulement si $MA=MC$.

e. En déduire la nature de l'ensemble (Γ_2). Tracer (Γ_2) dans la figure précédente.