ESPACES VECTORIELS REELS

LISTE DES COMPETENCES	
CODE	**DENOMINATION**
	Montrer qu'un système de vecteurs constitue une base.
	Montrer qu'un système de vecteur est libre
	Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous espace vectoriel
	Montrer qu'un sous espace vectoriel est un espace vectoriel
	Montrer qu'une application est linéaire

Exercice n°1

Les familles suivantes de vecteurs sont elles libres dans $\mathbb{R}^3$

1) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$;

Exercice n°2

La famille F = {(u = (1, 2, 1), v = (2, −1, 1), w = (3, 1, −1)} est-elle libre ?

Exercice n°3

Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\{(1,0,t);(1,1,t);(t,0,1)\}$ forment une base $\mathbb{R}^3$.

Exercice n°4

Montrer que la somme de vecteurs et le produit d'un vecteur par un nombre réel donnent à $\mathbb{R}^3$ une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°5

Montrer que la somme de polynômes et le produit d'un polynôme par un nombre réel donnent à P_n (polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels) une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°6

On considère les deux ensembles suivants :

$E_1 = \{(a, 2b, b-a) / a, b \in \mathbb{R}\}$

$E_2 = \{(c, c+d, d) / c, d \in \mathbb{R}\}$

1) Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit $\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \in E_1$. Quelle équation vérifient x_1, x_2, et x_3 ? Même question dans le cas de E_2.

3) Déterminer l'ensemble $E_1 \cap E_2$

Exercice n°7

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles suivants :

$P = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$

$D = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 - x_3 = 0\}$

1) Montrer que P et D sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

2) Déterminer une base et la dimension de chacun.

Exercice n°8

On considère les trois vecteurs

a = (1; m; m) ; b = (m; 1; m) ; c = (m; m; 1):

Déterminer, suivant les valeurs de m, le rang de cette famille de vecteurs.

Exercice n°9

1. Montrer que les vecteurs $v_1=(0,1,1)$ $v_2=(1,0,1)$ et $v_3=(1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $w=(1,1,1)$ dans cette base (v_1,v_2,v_3).
2. Montrer que les vecteurs $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(-1,1,0)$ et $v_1=(1,0,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(1,2,-3)$ et $w=(1,2,3)$ dans cette base (v_1,v_2,v_3).
3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Exercice n°10

Soient u = (3, 7, 0), v = (5, 0, −7), x = (2, 3, −1) et y = (1, −1, −2).

Montrer que les familles {u, v} et {x, y} engendrent le même sous espace vectoriel de

Exercice n°11

Si F_m est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par $F_m=\{(x_1,x_2,x_3)/x_2-2x_3=0 \text{ et } mx_2+2x_3=0\}$

Déterminer, suivant les valeurs de m, une base et la dimension de F_m.

Exercice n°12

Si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, parmi les affirmations suivantes

Les quelles sont sûrement fausses :

1. f est injective
2. f est surjective
3. f est bijective

Mêmes questions dans le cas où f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, puis dans le cas où f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice n°13

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$u(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3,x_1+\lambda x_2+\lambda x_3,x_1+\lambda x_2)$

Déterminer le noyau et l'image de u en fonction des valeurs du paramètre réel λ. Dans chaque cas, donner des bases de ces sous-espaces et préciser le rang de u.

Exercice n°14

1) Est-ce que le sous-ensemble F = {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$, y = 2x} de $\mathbb{R}^2$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2) Est-ce que le sous-ensemble G = {(x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$, $y^2=2x$, $z=0$} de $\mathbb{R}^3$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice n°15

Justifier que les ensembles suivants ne sont pas des espaces vectoriels :

1) $\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / xy=0\}$
2) $\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x=1\}$
3) $\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x\geq 0 \text{ et } y\geq 0\}$

4) $\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/-1\le x\le 1 \text{ et } -1\le y\le 1\right\}$

Exercice n°16

Justifier si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

(a) L'ensemble des fonctions réelles sur [0, 1], continues, positives ou nulles, pour l'addition et Le produit par un réel.

(b) L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ pour les mêmes opérations.

(c) L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que $f(3)=7$.

(d) L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations $x\oplus y=xy$ et ¸ $\lambda.x=x^\lambda$ $(\lambda\in\mathbb{R})$

(e) L'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\sin(x+y)=0$.

(f) L'ensemble des vecteurs (x, y, z) $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1;3-2)$

Exercice n°17

Montrer que l'ensemble $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+y=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

Exercice n°18

Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

1) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y=0\right\}$
2) $\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x=t \text{ et } y=z\right\}$
3) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / z=1\right\}$
4) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+xy\ge 0\right\}$
5) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\ge 1\right\}$

Exercice n°19

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels :

1) $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=-y\right\}$
2) $G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+2z=0\right\}$
3) $H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x\ne 0\right\}$
4) $I=\left\{(x,2x) / x\in\mathbb{R}\right\}$
5) $J=\left\{(x+1,x-1,-y+4)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Exercice n°20

Peut-on trouver $t\in\mathbb{R}$ tel que les vecteurs $\begin{pmatrix}-2\\ \sqrt{2}\\ t\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-4\sqrt{2}\\ 4t\\ 2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ soient colinéaires ?

Exercice n°21

Peut-on trouver $t\in\mathbb{R}$ tel que les vecteur $\begin{pmatrix}1\\ 3t\\ t\end{pmatrix}$ soit une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$?

Exercice n°22

Montrer que les applications suivantes $f_i:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ sont linéaires. Caractériser géométriquement ces applications et faire un dessin.

1) $f_1(x,y)=(-x,-y)$
2) $f_2(x,y)=(3x,3y)$
3) $f_3(x,y)=(x,-y)$
4) $f_4(x,y)=(-x,y)$
5) $f_5(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$

Exercice n°23

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $u\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\x_1\end{pmatrix}$

1) Montrer que u est linéaire.
2) Déterminer la matrice M associée à u dans la base canonique.
3) Calculer M^2 et M^3 puis en déduire M^{-1}.
4) En déduire M^n ainsi que M^{-n} pour $n\in\mathbb{N}$.

Exercice n°24

Soit E = {suites réelles u_n tel que u_n converge}.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}-ev$
2. On pose F = {suites u_n tel que u_n converge vers 0} et G = {suites u_n tel que u_n est constante}. Vérifier que F et G sont des sous espaces vectoriels de E, et montrer que E = F $\oplus$ G

Exercice n°25

Le plan vectoriel réel E_2 est muni d'une base $\mathcal{B}=(\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On donne $\overrightarrow{e_1}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$.

1. Démontrer que $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ est une base de E_2.
2. Soit f l'endomorphisme de E_2 défini par : $\forall\vec{u}(x;y)\in\mathbb{R}^2, f(\vec{u})=\left(x-\frac{1}{2}\right)\vec{\imath}+(2x-y)\vec{\jmath}$
   - **(a)** Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
   - **(b)** f est-il un automorphisme ?
   - **(c)** Déterminer le noyau $Kerf$ et l'image Imf de f. Préciser une base et la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
   - **(d)** Trouver la matrice A' de f dans la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$.

Exercice n°26

E est un plan vectoriel dont une base est $(\mathrm{e}\,;\mathrm{e}')$ et $\mathrm{f_m}$ la famille d'endomorphismes de E définies par :
$\begin{cases}\mathrm{f_m}(\mathrm{e})=\mathrm{me}-\mathrm{e}'\\ \mathrm{f_m}(\mathrm{e}')=-\mathrm{e}+\mathrm{me}'\end{cases}$, où m est un paramètre réel.

1. Pour quelles valeurs de m l'application $\mathrm{f_m}$ est-elle non injective ?
2. On suppose $\mathrm{m}=-1$:
   - **(a)** Déterminer le noyau (de base i) et l'image (de base j) de l'endomorphisme $\mathrm{f_{-1}}$.
   - **(b)** Vérifier que $(\mathrm{i}\,;\mathrm{j})$ est une base de E.
   - **(c)** Ecrire la matrice de $\mathrm{f_{-1}}$ relativement à cette base.
3. Dans cette question , on prend $\mathrm{m}=-2$.
   1. Donner la matrice dans la base $(e\,;e')$, d'une application linéaire g telle que $\mathrm{f_{-2}}\circ\mathrm{g}=\mathrm{I_2}$ avec $\mathrm{I_2}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

2. Que représente l'endomorphisme g pour f_{-2} ?

Exercice n°27

Le plan vectoriel réel E_2 est muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On donne $\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

3. Démontrer que $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ est une base de E_2.
4. Soit f l'endomorphisme de E_2 défini par :

   (a) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) f est-il un automorphisme ?
   (c) Déterminer le noyau $Kerf$ et l'image Imf de f. Préciser une base et la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
   (d) Trouver la matrice A' de f dans la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$.

Exercice n°28

E est un plan vectoriel muni d'une base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Soit f et g les endomorphisme de E définis par : $f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $g(\vec{\imath}) = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $g(\vec{\imath}) = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

1. Ecrire la matrice $M_{f\circ g}$ de $f \circ g$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.
2. **(a)** Déterminer le noyau $Kerf$ de f. f est-elle injective ?
   (b) En déduire l'image Imf de f.
3. Vérifier que la matrice M_g de g est inversible puis déterminer $M_{g^{-1}}$.
4. On pose $F_k = \{\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \in E /\, f(\vec{u}) = k\vec{u}\,\}$ où $k \in \mathbb{R}$.
   Démontrer que F_k est un sous espace vectoriel de E.

Exercice n°29

E est un plan vectoriel dont une base est $(\mathrm{e}\,;\mathrm{e}')$ et $\mathrm{f_m}$ la famille d'endomorphismes de E définies par :
$\begin{cases} \mathrm{f_m}(\mathrm{e}) = \mathrm{me} - \mathrm{e}' \\ \mathrm{f_m}(\mathrm{e}') = -\mathrm{e} + \mathrm{me}' \end{cases}$, où m est un paramètre réel.

4. Pour quelles valeurs de m l'application $\mathrm{f_m}$ est-elle non injective ?
5. On suppose $\mathrm{m} = -1$:
   (d) Déterminer le noyau (de base i) et l'image (de base j) de l'endomorphisme $\mathrm{f_{-1}}$.
   (e) Vérifier que (i ; j) est une base de E.
   (f) Ecrire la matrice de $\mathrm{f_{-1}}$ relativement à cette base.
6. Dans cette question , on prend $\mathrm{m} = -2$.
   3. Donner la matrice dans la base $(e\,;e')$, d'une application linéaire g telle que $\mathrm{f_{-2}} \circ \mathrm{g} = \mathrm{I_2}$ avec $\mathrm{I_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   4. Que représente l'endomorphisme g pour $\mathrm{f_{-2}}$?

Exercice n°30

f est un endomorphisme du plan vectoriel E_2 défini par $f(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j}$ j ; $f(\vec{j}) = 2\vec{i} + \vec{j}$.

1. Écrire la matrice A de f dans la base $(\vec{i},\vec{j})$
2. Déterminer les valeurs du réel α pour lesquelles $A - \alpha I$ n'est pas inversible.
3. Définir analytiquement f .
4. (a) Déterminer $Kerf$. f définit-il un automorphisme?
   (b) En déduire dim $\operatorname{Im} f$.
5. (a) Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{u}(x;y)$ tels $f(\vec{u}) = -\vec{u}$.
   (b) Donner un vecteur $\vec{e}_1$ de cet ensemble.
6. (a) Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{u}(x;y)$ tels que $f(\vec{u}) = 3\vec{u}$.
   (b) Donner un vecteur non nul $\vec{e}_2$ de cet ensemble. de cet ensemble. 0

7. Vérifier que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E_2

8. Donner la matrice de f dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Exercice n°31

Montrer que dans un espace vectoriel E; on a $(-1)x = -x$ pour tout vecteur x :

Exercice n°32

Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel
E est un sous-espace vectoriel. Qu'en est-il de la réunion ?

Exercice n°33

Soient F; G deux sous-espaces vectoriels de E: Montrer que $G \cup F$ est un sous espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$

Exercice n°34

Soit u une application linéaire de E dans E (i. e. un endomorphisme de E).
Montrer que : $\mathrm{Im}(u) \subset Ker(u) \Leftrightarrow u \circ u = 0$

Exercice n°35

On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$:

1. Montrer que $\mathrm{Im}(p)$ est l'ensemble des vecteurs invariants de p:
2. Montrer que $\mathrm{Im}(p) \cap Ker(f) = \{0\}$:
3. Montrer que tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de ker (p) et d'un vecteur de Im (p) (on dit que E est somme directe de ker (p) et Im (p) ; ce qui se note $E = Ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
4. Montrer que si p est un projecteur, il en est alors de même de $q = Id_E - p$ et on a $Ker(q) = \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q) = Ker(p)$:

Exercice n°36

On note GL(E) l'ensemble de tous les automorphismes de E. L'ensemble GL(E) est-il un espace vectoriel ?

Exercice n°37

Déterminer dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ la matrice de l'endomorphisme u (s'il existe) tel que $u(e_1) = ae_1 - e_2$ et $u \circ u = u$ où a est un réel donné.

Exercice n°38

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et b pour que l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ b & b+1 \end{pmatrix}$ soit un automorphisme

Exercice n°39

On pose $E = C^\infty(\mathbb{R})$, et on définit. $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$

On note G l'ensemble des applications affines de E, et H = Vect(cos, sin)

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Montrer que F et H sont supplémentaires.
3. A-t-on G = H ? Conclure.

Exercice n° 40

Soit f la fonction définie par : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x-y, x+y) \end{array}$

1. Montrer que $f \in L\left(\mathbb{R}^2\right)$.
2. Déterminer ker f.
3. Déterminer Imf.

Exercice n°41
Soient f et g des formes linéaires sur E. Montrer que
$Kerf = Kerg \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / g = \lambda f$

Exercice n°42
Montrer qu'une forme linéaire est ou bien nulle ou bien surjective

Exercice n°43
Déterminer lesquels des ensembles E1, E2, E3 et E4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\right\}$

$E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\right\}$

$E_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\right\}$

$E_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\right\}$

Exercice n°44
Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel des suites réelles,
lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?
1. _ Ensemble des suites bornées.
2. _ Ensemble des suites décroissantes à partir d'un certain rang.
3. _ Ensemble des suites périodiques.
4. _ Ensemble des suites convergeant vers 0.
5. _ Ensemble des suites monotones.
6. _ Ensemble des suites équivalentes à 1/n.
7. _ Ensemble des suites dominées par 1/n.
8. _ Ensemble des suites négligeables devant 1/n.
9. _ Ensemble des suites dont le terme général est $\leq$ 1 à partir d'un certain rang.

Exercice n°45
Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel des polynômes,
lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?
1. _ Ensemble des polynômes, nul ou de degré 0.
2. _ Ensemble des polynômes de degré 3.
3. _ Ensemble des polynômes dont le terme constant est nul.
4. _ Ensemble des polynômes à coefficients positifs ou nuls.
5. _ Ensemble des polynômes multiples de X − 1.
6. _ Ensemble des polynômes multiples de X − 1 ou X + 1.
7. _ Ensemble des polynômes multiples de $X-1$ ou X^2-1.
8. _ Ensemble des polynômes contenant uniquement des monômes de degrés impairs.
9. _ Ensemble des polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit formée uniquement
de monômes de degrés impairs.

Exercice n°46
Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel des applications de
R dans R, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?
1. _ Ensemble des fonctions telles que f(0) = f(1).
2. _ Ensemble des fonctions telles que f(0) = 1.
3. _ Ensemble des fonctions nulles sur l'intervalle [0, 1].
4. _ Ensemble des fonctions croissantes.
5. _ Ensemble des fonctions f telles que $f^2(x) = f^2(-x)$.
6. _ Ensemble des fonctions périodiques de période 2π.
7. _ Ensemble des fonctions f telles que la suite (f(n)) tend vers 0.

Exercice n°47
Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?
1. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels peut être vide.
2. Si un ensemble contient toutes les droites vectorielles engendrées par ses vecteurs, c'est un espace vectoriel.
3. Si un ensemble contient tous les plans vectoriels engendrés par deux de ses vecteurs, c'est un espace vectoriel.
4. Si un ensemble contient toutes les combinaisons linéaires de 3 quelconques de ses vecteurs, alors c'est un espace vectoriel.
5. Si un ensemble contient la somme de deux quelconques de ses vecteurs, c'est un espace vectoriel.
6. Si l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est réduite au vecteur nul, alors leur somme est directe.
7. La somme de deux droites vectorielles est un plan vectoriel si et seulement si cette somme est directe.
8. Dans un espace de dimension 3, la somme d'une droite vectorielle et d'un plan vectoriel est toujours directe.
9. Dans un espace de dimension 3, la somme de deux plans vectoriels n'est jamais directe.

Exercice n°48
Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E
dans F. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses
et pourquoi ?
1. _ L'image du vecteur nul de E est le vecteur nul de F.
2. _ L'image de f est un sous-espace vectoriel de F.
3. _ L'image par f d'une famille libre dans E est toujours une famille libre dans F.
4. _ L'image par f d'une famille liée dans E est une famille liée dans F.
5. _ L'image par f d'une famille génératrice dans E est toujours une famille génératrice dans F.
6. _ Si F est de dimension finie alors Ker f est un sous-espace de dimension finie de E.
7. _ Si E est de dimension finie alors Im f est un sous-espace de dimension finie de F.
8. _ Si E et F sont de dimension finie, et dim(E) > dim(F) alors $Ker f \neq \{0\}$.
9. _ Si E et F sont de dimension finie, et dim(E) > dim(F) alors f est surjective.
10. _ Si E et F sont de dimension finie, et dim(E) < dim(F) alors f est injective.

Exercice n°49
Montrer que les familles suivantes sont libres dans l'espace vectoriel des
suites de réels.

1. $\left((1),(2^n),(n2^n)\right)$
2. $\left((1),(\cos(n\pi/4)),(\cos(n\pi/2))\right)$
3. $\left((1),(\sin(n\pi/4)),(\sin(n\pi/2))\right)$
4. $\left((1),(2^n\cos(n\pi/4)),(\mathrm{n}\,2^n\cos(n\pi/4))\right)$

Exercice n°50

Montrer que la famille (f, g, h) est libre dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dans les cas suivants.

1. $f:x\mapsto 1$, $g:x\mapsto x$, $h:x\mapsto x^2$

2. $f:x\mapsto 1$, $g:x\mapsto |x|$, $h:x\mapsto \sqrt{|x|}$

3. $f:x\mapsto \sin(x)$, $g:x\mapsto \cos(x)$, $h:x\mapsto \sin(3x)$

Exercice n°51

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.

(1) $Ker(f)\cap \mathrm{Im}(f)=\{0\}$

(2) $Ker(f)=Ker(f\circ f)$.

2. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.

(3) $Ker(f)+\mathrm{Im}(f)=E$

(4) $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(f\circ f)$.

3. Montrer que si E est de dimension finie, alors les 4 propositions (1), (2), (3) et (4) sont équivalentes.

Exercice n°52

On considère les équations de récurrence linéaires suivantes.

1) $u_{n+2}=u_{n+1}+2u_n$

2) $u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n$

3) $u_{n+2}=\frac{3}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$

4) $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$

5) $u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n$

6) $u_{n+2}=\frac{3}{2}u_{n+1}+u_n$

7) $u_{n+2}=-2u_{n+1}-2u_n$

8) $u_{n+2}=-u_n$

9) $u_{n+2}=u_{n+1}-2u_n$

10) $u_{n+2}=4u_{n+1}+4u_n$

Pour chacune de ces équations,

1. Déterminer l'ensemble des suites de réels qui la vérifient.
2. Déterminer la suite (un) vérifiant l'équation et $u_0=1$, $u_1=-1$.
3. Déterminer la suite (un) vérifiant l'équation et $u_0=0$, $u_1=2$.

Exercice n°53

Quand dit-on d'une application f entre deux espaces vectoriels E et F qu'elle est linéaire ?

2. Définir l'image d'une application linéaire f.
3. Démontrer qu'une application linéaire f entre deux espaces vectoriels E et F est surjective si et seulement si Im(f) = F.
4. Définir le noyau d'une application linéaire f.
5. Démontrer qu'une application linéaire f entre deux espaces vectoriels E et F est

injective si et seulement si Ker(f) = {0}.

Exercice n°54

Soit $u:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ défini pour tout $x=(x_1, x_2, x_3)\in \mathbb{R}^3$ par $u(x)=(x_1+x_2+x_3, 2x_1+x_2-x_3)$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$.

Exercice n°55

Soit f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z)=(x+y+z,-x+2y+2z)$

On appelle $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\beta'=(f_1,f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base et la dimension de $\ker(f)$ et une base et la dimension de $Im(f)$.

Exercice n°56

Soit f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout vecteur $u=(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$ par : $f(u)=(-2x+y+z,x-2y+z)$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim(Im(f))$.
3. Donner une base de $Im(f)$.

Exercice n°57

Soit f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout vecteur $u=(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$ par : $f(u)=(-2x+y+z,x-2y+z)$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim(Im(f))$.
3. Donner une base de $Im(f)$.

Exercice n°58

On considère l'application h: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $h(x,y)=(x-y,-3x+3y)$

1. Montrer que h est une application linéaire.
2. Montrer que h est ni injective ni surjective.
3. Donner une base de son noyau et une base de son image.

Exercice n°59

Soit f l'application linéaire f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_3,2x_1+x_2-3x_3,-x_2+2x_3)$

Et soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
2. Déterminer les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique.
3. Calculer une base de $\ker(f)$ et une base de $Im(f)$.

Exercice n°60

Soit f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout vecteur $u=(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$ par : $f(u)=(-2x+y+z,x-2y+z,x+y-2z)$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim(Im(f))$.
3. Donner une base de $Im(f)$.

Exercice n°61

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$

Soit f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $u=(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$ par :

$f(u)=(6x-4y-4z,5x-3y-4z,x-y)$

1. Montrer qu'il existe un vecteur $a\in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\ker(f)=Vect(a)$, déterminer un vecteur qui convient.
2. Soit $b=e_1+e_2$ et $c=e_2-e_3$

a. Calculer $f(b)$ et $f(c)$

b. En déduire que $\{b,c\}$ est une base de $Im(f)$.

On pourra utiliser une autre méthode.

3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $Im(f)$.
4. A-t-on $\ker(f)\oplus Im(f)= \mathbb{R}^3$?

Exercice n°62

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont l'image de la base canonique $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ est : $f(e_1)=-7e_1-6e_2$ $f(e_2)=8e_1+7e_2$ $f(e_3)=6e_1+6e_2-e_3$

1. Pour tout vecteur $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ déterminer $f\circ f(x)$.
2. En déduire que f est inversible (c'est-à-dire bijective) et déterminer f^{-1}.

Exercice n°63

Soit u: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par : $u(x_1,x_2,x_3)=(-2x_1+4x_2+4x_3,-x_1+x_3,-2x_1+4x_2+4x_3)$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $Im(u)$.
3. A-t-on $\ker(u)\oplus Im(u)= \mathbb{R}^3$?

Exercice n°64

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $u(e_1)=2e_1+e_2+3e_3$; $u(e_2)=e_2-3e_3$; $u(e_3)=-2e_2+2e_3$

1. Soit $x=(x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3$ un vecteur. Déterminer l'image par u du vecteur x. (Calculer $u(x)$).
2. Soient $E=\{x\in\mathbb{R}^3,u(x)=2x\}$ et $F=\{x\in\mathbb{R}^3,u(x)=-x\}$ Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de E et une base de F.
4. Y a-t-il $E\oplus F=\mathbb{R}^3$?

Exercice n°65

Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit f:$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que :

$f(e_1)=-\frac{1}{3}e_1+\frac{2}{3}e_2+\frac{2}{3}e_3=\frac{1}{3}(-e_1+2e_2+2e_3)$, $f(e_2)=\frac{2}{3}e_1-\frac{1}{3}e_2+\frac{2}{3}e_3=\frac{1}{3}(2e_1-e_2+2e_3)$ et

$f(e_3)=\frac{2}{3}e_1+\frac{2}{3}e_2-\frac{1}{3}e_3=\frac{1}{3}(2e_1+2e_2-e_3)$

Soient $E_{-1}=\{u\in\mathbb{R}^3 \;/\; f(u)=-u\}$ et $E_1=\{u\in\mathbb{R}^3 \;/\; f(u)=u\}$

1. Montrer que E_{-1} et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que e_1-e_2 et e_1-e_3 appartiennent à E_{-1} et que $e_1+e_2+e_3$ appartient à E_1.
3. Que peut-on en déduire sur les dimensions de E_{-1} et de E_1 ?
4. Déterminer $E_{-1}\cap E_1$.
5. A-t-on $E_{-1}\oplus E_1= \mathbb{R}^3$?
6. Calculer $f^2=f\circ f$ et en déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice n°66

Soit $\beta=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $u(e_1)=e_1+e_2$ et tel que $\dim(\ker(u))=1$

1. Déterminer $u(e_2)$ en fonction d'un paramètre $a\in\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'image d'un vecteur $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}$ en fonction de a.
3. Déterminer une base du noyau de $\ker(u)$.

Exercice n°67

Soit u une application linéaire de E dans E, E étant un espace vectoriel de dimension n avec n pair.
Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

(a) $u^2=O_E$ (où O_E est l'application linéaire nulle) et $n=2\dim(Im(u))$

(b) $Im(u)=\ker(u)$

Exercice n°68

Soit u une application linéaire de E vers E.
Montrer que : u est injective si et seulement si $\ker(u)=\{0_E\}$.

Exercice n°69

Soit $u:E\to E$ une application linéaire et λ un réel.

1. Soit $E_\lambda=\ker(u-\lambda id_E)$. Calculer $u(x)$ pour $x\in E_\lambda$
Montrer que est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $F\subset E$ un sous-espace vectoriel de E, montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Si $\lambda\neq 0$, montrer que $u(E_\lambda)=E_\lambda$

Exercice n°70

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respectives n et p
Soit $u:E\to F$ une application linéaire

1. Montrer que si $n<p$ alors u n'est pas surjective.
2. Montrer que si $n>p$ alors u n'est pas injective.

Exercice n°71

Soit $f:E\to F$ une application linéaire. Montrer que : $\ker(f)\cap\mathrm{im}(f)=f(\ker(f^2))$

Exercice n°72

Soit u un endomorphisme de E un espace vectoriel.

1. Montrer que $\ker(u)\subset\ker(u^2)$.
2. Montrer que $Im(u^2)\subset Im(u)$.

Exercice n°73

Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_1+x_2)$ et $\beta=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base β.
3.

a) Déterminer le noyau et l'image de f.

b) En déduire que f est inversible.

c) Déterminer f^{-1} dans la base β, en déduire A^{-1}.

4. Montrer que $A=RH$.

Où H est la matrice d'une homothétie dont on donnera le rapport et R est la matrice d'une rotation dont on donnera l'angle.

Soient $a=e_1+e_2$ et $b=e_1-e_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On pose $\beta'=(a,b)$.

5. Montrer que $\beta'=(a,b)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Calculer $f(a)$ et $f(b)$.
7. Déterminer la matrice de f dans la base β'.

Exercice n°74

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$u(e_1)=-3e_1+2e_2-4e_3$

$u(e_2)=e_1-e_2+2e_3$

$u(e_3)=4e_1-2e_2+5e_3$

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique.
2. Montrer que $E=\{x\in\mathbb{R}^3,u(x)=x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul a de E.
3. Montrer que $F=\{(x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3,-2x_1+2x_2+3x_3=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base (b,c) de F.
4. Montrer que $\beta'=(a,b,u(b))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que $E\oplus F=\mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice R de u dans la base β'.

Exercice n°75

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u l'application linéaire qui a un vecteur $x=(x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur $u(x)=(x_2-2x_3,2x_1-x_2+4x_3,x_1-x_2+3x_3)$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
2. Déterminer une base (a,b) de $\ker(u-Id)$.
3. Donner un vecteur c tel que $\ker(u)=vect(c)$.
4. Montrer que $\beta'=(a,b,c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
6. Montrer que $Im(u)=\ker(u-Id)$
7. Montrer que $\ker(u)\oplus Im(u)= \mathbb{R}^3$.

Exercice n°76

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout $x=(x_1,x_2,x_3)$ par
$u(x)=(-10x_1+3x_2+15x_3,-2x_1+3x_3,-6x_1+2x_2+9x_3)$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de u. On donnera un vecteur directeur a de $\ker(u)$.
3. A-t-on $\ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^3$?
4. Déterminer un vecteur b tel que $a=u(b)$.
5. Montrer que $E_{-1}=\{x\in\mathbb{R}^3, u(x)=-x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, déterminer un vecteur directeur de E_{-1} que l'on notera c.
6. Montrer que $\beta'=(a,b,c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Déterminer la matrice A' de u dans la base β' et donner la relation reliant A et A'.

Exercice n°77

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Soient $a=e_1-e_2+e_3$, $b=2e_1-e_2+e_3$ et $c=2e_1-2e_2+e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que $\beta'=(a,b,c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de β à β'. Calculer P^{-1}.
3. Déterminer la matrice R de u dans la base β'.
4.

a) Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de R

b) Calculer R^4

c) En déduire les valeurs de A^{4n}.

Exercice n°78

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$f(x;y;z)=(x+y;y+z)$:

1. Déterminer la matrice associée à f dans les bases canoniques.
2. Donner une base de Ker(f) et de Im(f). L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?