GEOMETRIE ANALYTIQUE DANS LE PLAN

Exercice n°1

Déterminer l'équation du cercle centré en C et de rayon r si :

a) C (0; 0) et r = 1;

b) C = (1; 2) et $r = 2\sqrt{2}$

c) C (3; -4) et r = 3

d) $C\left(\frac{5}{2};0\right)$ et r = 5

e) C = (-2; -7) et r = 7

Exercice n°

Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthonormal. Déterminer une équation :

a) du cercle de centre C(2; 1) et de rayon 3.

b) du cercle de diamètre [OA] avec A(0 ;2).

c) du cercle de centre C(2; 1) qui passe par B(1; 3).

d) du cercle qui passe par les points A(4 ;0) ; B(0 ;2) et C(4 ;0).

Exercice n°

Déterminer le centre et le rayon du cercle C d'équation :

1) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

2) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$

3) $x^2 + y^2 - 4x - 16 = 0$

4) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 50 = 0$

Exercice n°

Ecrire une équation du cercle C de centre (4; 6) tangent à la droite d'équation $3x + 3y - 7 = 0$

Exercice n°

Soit C le cercle de centre A(2 ;0) et de rayon 5.

a) Montrer que M(4; 1) est extérieur à C.

b) Déterminer l'équation des tangentes à C passant par M.

Exercice n°

Exercice n°2

Calculer (en reformant des carrés parfaits) les coordonnées du centre et le rayon des cercles d'équation :

1) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$

2) $x^2 + y^2 + 16x + 10y - 11 = 0$

3) $x^2 + y^2 - x + 6y + \frac{1}{4} = 0$

4) $x^2 + y^2 + 2y - 24 = 0$

5) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 13 = 0$

Exercice n°3

Trouver l'équation du cercle qui a pour diamètre le segment joignant les points P (5; -1) et Q(-3; 7) et passant par ces points.

Exercice n°4

Soit Γ le cercle d'équation $x^2+y^2-4x+2y-20=0$

a) Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ.

b) Trouver les coordonnées des points de Γ ayant pour abscisse x = -2

c) Trouver les coordonnées des points de Γ ayant pour ordonnée y = 0.

Exercice n°5

Déterminer l'équation du cercle c dans les cas suivants :

a) de centre C(4; -2) et de rayon r = 8

b) de centre C(-4; -2) et passant par le point P (1; 3)

c) de centre C(-5; 6) et tangent à l'axe des x.

d) de centre C(3; 6) et tangent à la droite d : 2x -y + 5 = 0

e) dont le centre se trouve sur la droite y = x et tangent aux 2 axes, avec un rayon de 4.

Exercice n°6

Déterminer le centre C et le rayon r des cercles suivants :

1) $x^2+y^2-25=0$
2) $x^2+y^2-4x+6y+4=0$
3) $x^2+y^2-8x-6y=0$
4) $2x^2+2y^2-2x+10y+11=0$
5) $225x^2+225y^2+600x+-990y+1089=0$
6) $x^2+y^2+36=0$
7) $x^2+y^2+10y+9=0$
8) $x^2+y^2+4x-2y+9=0$

Exercice n°7

Déterminer l'équation du cercle c

a) tangent à la droite d'équation 4x -y -9 = 0 et de centre C(-2; 0);

b) passant par le point P(3; -6) et tangents aux axes Ox et Oy.

Exercice n°8

Trouver l'équation du cercle passant par (0; 0), ayant un rayon égal à 13 et dont l'abscisse de son centre est -12.

Exercice n°9

Soit le cercle c : $x^2+y^2-8x-2y+4=0$ et le point A(-5 ; 7)

a) Déterminer l'équation du cercle de centre A, tangent au cercle c.

b) Déterminer le point de tangence de ces deux cercles.

Exercice n°10

Soit A(4; 3) et B(-1; 0) deux points du plan et soit d la droite d'équation 2x -y + 6 = 0; AB est un des côtés d'un triangle ABC rectangle en A.

a) Trouver les coordonnées du sommet C sachant que C ∈d.

b) Calculer le périmètre et l'aire du triangle ABC.

c) Déterminer l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice n°11

Déterminer l'équation, le centre et le rayon du cercle passant par les points E, F et G.

a) E(3; 1); F(-1; 1); G(-2; -4)

b) E(8; 0); F(4; 4); G(0; 0)

c) E(0; 4); F(1; 3); G(2; 0)

Exercice n°12

Soit le triangle ABC, avec A(-5 ; 2), B(5 ; 3) et C(-2 ; 4).

a) Déterminer le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

b) Déterminer le centre et le rayon du cercle ci-dessus.

Exercice n°13

1) $(c): x^2+y^2-25=0;$ $(d): x-2y+5=0$
2) $(c): x^2+y^2-16=0;$ $(d): x-2y+10=0$
3) $(c): x^2+y^2-20=0;$ $(d): x-2y-10=0$
4) $(c): x^2+y^2-6x-16=0;$ $(d): 3x-4y+16=0$
5) $(c): x^2+y^2-6x-6y+9=0;$ $(d): x-3y-6=0$
6) $(c): x^2+y^2-4x-4y-5=0;$ $(d): x+y+5=0$

Exercice n°14

Déterminer l'équation de la droite t qui est tangente au cercle c et qui passe par le point T ∈c.

1) $x^2+y^2-25=0$ $T(3;4)$
2) $x^2+y^2-2x-4y-5=0$ $T(4;3)$
3) $x^2+y^2-8x-6y=0$ $T(0;0)$

Exercice n°15

Soit les cercles :

$c_1: x^2+y^2-4x+6y+4=0$ $c_2: x^2+y^2-8x-1=0$ $c_3: x^2+y^2+2x+2y-23=0$

et les droites

$d_1: 3x+4y+32=0$ $d_2: x-8=0$ $d_3: x-4y+13=0$ $d_4: y+6=0$

Indiquer quelles droites sont tangentes à quels cercles
(Répondre sans déterminer les intersections)

Exercice n°16

Déterminer les tangentes t_1 et t_2 au cercle c et issues du point A :

a) $x^2+y^2-13=0$; $A(1;5)$
b) $x^2+y^2-25=0$; $A(7;1)$
c) $x^2+y^2-6x-2y+8=0$; $A(0;0)$
d) $x^2+y^2-6x+6y+8=0$; $A(-2;2)$

Exercice n°17

Déterminer les tangentes, t_1 et t_2, au cercle c et parallèles à la droite d :

$x^2+y^2-6x+4y-12=0 \quad ; \quad d: 4x+3y=0$

$x^2+y^2-25=0 \quad ; \quad d: 3x+4y+5=0$

$x^2+y^2+4x-4y-92=0 \quad ; \quad d: 3x-4y+10=0$

Exercice n°18

Déterminer l'intersection I des cercles c_1 et c_2

$c_1: x^2+y^2-25=0 \quad ; \quad c_2: x^2+y^2-8x+7=0$

$c_1: x^2+y^2-25=0 \quad ; \quad c_2: x^2+y^2-12x-4y-5=0$

$c_1: x^2+y^2-14=0 \quad ; \quad c_2: x^2+y^2-10x+10y+46=0$

Exercice n°19

Trouver l'équation du cercle qui passe par le point P(-2; 1) et qui est tangent à la droite $3x-2y-6=0$ au point T(4; 3)

Exercice n°20

Montrer que les cercles : $c_1: x^2+y^2-16x-20y+115=0$ et $c_2: x^2+y^2+8x-10y+5=0$ sont tangents et trouver le point de tangence.:

Exercice n°21

Soit les cercles

$c_1: x^2+y^2-25=0$

$c_2: x^2+y^2-14x-8y+49=0$

$c_3: x^2+y^2-16x+12y+75=0$

Sans déterminer les intersections, donner le nombre de points d'intersection de c_1 et c_2 ; c_1 et c_3 ; c_2 et c_3

Exercice n°22

Soit le triangle délimité par les trois droites :

$d_1: x=4$

$d_2: y=2-x$

$d_3: x-4y+14=0$

a) Calculer les coordonnées des trois sommets du triangle.

b) Déterminer l'équation du cercle circonscrit au triangle de deux manières distinctes.

Exercice n°23

Déterminer l'intersection des cercles c_1 et c_2 si

a) c_1 est le cercle unité centré à l'origine; c_2 est le cercle unité centré en (1,1)

b) c_1 passe par les points (-2; 1), (2; 1) et <0; -1>; c_2 est centré en (-1; 2) et a pour rayon 1

Exercice n°24
On considère le cercle Γ d'équation : $x^2+y^2-4x-2y-35=0$
a) Trouver le centre et le rayon du cercle Γ.
b) Déterminer l'équation de la droite tangente à Γ au point P(0;7)
c) Déterminer l'équation des droites tangentes à Γ et parallèles à la droite d'équation $d: y+3x-4=0$.

Exercice n°25
a) Soit le point P(-4;2) extérieur au cercle Γ d'équation $x^2+y^2=10$
Trouver l'équation des tangentes au cercle passant par P.
b) Même question pour le point P(-1;5) et le cercle Γ d'équation $x^2+y^2-4x+2y=31$

Exercice n°26
i) Déterminer l'intersection du cercle Γ d'équation : $x^2+y^2+2x-6y-15=0$ avec les droites :
a) $d_1: y=x-5$
b) $d_2: x=-6$
c) $d_3: y=3$
ii) Déterminer l'intersection du cercle Γ d'équation: $(x-3)^2+(y+1)^2=20$ avec les droites :
a $d_4: x+2y-1=0$
b) $d_5: 2x-y=0$
c) $d_6: 3x-2y+8=0$
d) $d_7: 2x-y-17=0$

Exercice n°27
Soit les cercles :
$c_1: x^2+y^2-5x+6y-40=0$
$c_2: x^2+y^2+2x-22y+37=0$
a) Déterminer les points d'intersection de ces deux cercles.
b) Déterminer l'équation des tangentes :
i) au cercle c_1 passant par le point A(8 ; 2)
ii) au cercle c_2 passant par B(-2 ; 2)
iii) au cercle c_2 parallèles à la droite d : $d: 2x-9y+11=0$

Exercice n°28
1°) Écrire les formes canoniques de x^2-x et de $y^2-6y+\dfrac{21}{4}$

2°) Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Soit A le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};3\right)$ et M un point de coordonnées $(x;y)$. Déterminer en fonction de x et y l'expression de la distance AM.

3°) En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient l'équation

$$x^2 - x + y^2 - 6y + \frac{21}{4} = 0$$

Exercice n°29

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère les points $\mathrm{K}(2\,;1)$ et $\mathrm{L}(2;0)$. Soit **C** le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$.

1. **(a)** Déterminer le centre Ω et le rayon r de **C** .
   (b) Vérifier que le point L appartient à **C** et en donner une équation de la tangente (T) à **C** au point L.
2. Etudier la position du point K par rapport à **C** .
3. Soit $(\mathcal{D}_\mathrm{m})$ la droite passant par K et de coefficient directeur m ; $\mathrm{M}(x\,;y)$ un point appartenant à $(\mathcal{D}_m)$ et à **C** .
   (a) Donner l'équation réduite de la droite $(\mathcal{D}_\mathrm{m})$.
   (b) Montrer que x est solution de l'équation
   $(\mathrm{E_m}) : (1+\mathrm{m}^2)x^2 + (-4\mathrm{m}^2 + 6\mathrm{m} - 2)x + 4\mathrm{m}^2 - 12\mathrm{m} + 5 = 0$
   (c) Vérifier que le discriminant de $(\mathrm{E_m})$ est $\Delta_\mathrm{m} = 8(2\mathrm{m}^2 + 3\mathrm{m} - 2)$.
   (d) Pour quelles valeurs de m l'équation $(\mathrm{E_m})$ admet-elle une unique solution ?
   (e) En déduire les équations des droites passant par K et tangentes à **C** .
4. **(a)** Déterminer les points $\mathrm{M}(x\,;y)$ de **C** tels que : $\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{KM}} = 0$.
   (b) En déduire les équations des droites passant par K et tangentes à **C** .

Exercice n°30

Soit P le plan affine, muni d'un repère orthonormé (O,I,J)

On considère le cercle (ζ) de centre Ω et d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$;

et la famille de droites (D_m) d'équations $2x + y - m = 0$.

1. Montrer que les droites (D_m) ont une direction fixe.
2. Déterminer l'équation paramétrique du cercle (ζ)
3. Soit d la distance de Ω à (D_m)
   (a) Montrer que $d^2 = \frac{1}{5}m^2 - 2m + 5$
   (b) En déduire pour quelles valeurs de m, (D_m) est tangent à (ζ)
4. Tracer (ζ) et les droites correspondantes dans un repère orthonormé.

Exercice n°31

Le plan est muni d'un repère (O, I, J),on considère le cercle C d'équation :

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0.$$

1. Déterminer les coordonnées de son centre A.
2. Soit (D) la droite d'équation cartésienne x − y + 2 = 0,trouver les coordonnées des points d'intersection de C et (D) .
3. Soit B(−1, 1),Vérifier que B appartient à C et trouver une équation cartésienne de la droite (L) tangente à C en B.

Exercice n°32

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. on considère le point $I(-2;-1)$ et les droites D_m d'équation $4x-3y+2m=0$, où m est un nombre réel.

1. Pour quelle valeur de m I appartient - il à D_m ?

On suppose $m \neq \frac{5}{2}$.

2. La distance d'un point $M_0(x_0,y_0)$ à la droite (D) d'équation $ax+by+h=0$ est le réel $d(M_0,D)$ défini par $d(M_0,D)=\frac{|ax_0+by_0+h|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Déterminer en fonction de m la distance de de I à (D_m)
3. Soit (C) le cercle de centre I et de rayon 2. Donner une équation cartésienne de (C)
4. Pour quelles valeurs de m la droite (D_m) est - elle tangente à (C).
5. Soient $A(0,1)$ et $B(-4,-3)$ deux points du plan.
   (a) Montrer que I est le milieu de $[AB]$
   (b) Montrer que l'ensemble des points M tels que $MA^2+MB^2=24$ est le cercle (C).

Exercice n°33
Dans un repère $(O;I,J)$, on donne les points $A(1,3)$, $B(-4,2)$ et $C(2,1)$
1. Vérifier que les points A, B et C sont non alignés.
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$., puis de $[BC]$.
3. En déduire les coordonnées du centre du cercle (γ) circonscrit au triangle ABC.
4. Déterminer une représentation paramétrique du cercle (γ)

Exercice n°34
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) ; on donne les points $A(3;4)$, $B(5;7)$ *et* G le barycentre des points pondérés $(A;-2)$ *et* $(B;1)$
1. Déterminer les coordonnées du point G
2. (C) est le cercle de centre $\Omega(2;-1)$ et de rayon $5cm$
   a. Donner une équation cartésienne de (C)
   b. Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point $D(-1;3)$
   c. Donner une représentation paramétrique de (C)
1. Soit (C') le cercle d'équation cartésienne : $x^2+y^2+6x-2y+1=0$
   Donner les caractéristiques du cercle (C')(son centre et son rayon)

Exercice n°35
plan est rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On donne les points A(6; 2),B(−2;−2) et C(1;−3).
1.Sachant qu'un cercle a une équation du type $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$(a, b et c étant des constantes telles que $c<a^2+b^2$), déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Soit le cercle C d'équation : $x^2+y^2-2x-4y-20=0$.
(a) Déterminer le centre et le rayon de C .
(b) Existe-t-il de(s) points du plan dont les coordonnées sont de la forme (−5; t) qui appartient

(appartiennent) au cercle C ? Si oui déterminer ce(s) points.
(c) Existe-t-il de(s) points du plan dont les coordonnées sont de la forme $(-2; t^2)$ qui appartient (appartiennent) au cercle C ? Si oui déterminer ce(s) points.
(d) Déterminer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont de la forme (t; t) qui
appartiennent au disque de même centre et de même rayon que le cercle C.

Exercice n°36
1- Vérifier que $x^2+y^2-2x-4y=0$ et $x^2+y^2+2x+4y-20=0$ sont des équations des cercles (C) et (C') dont on précisera les éléments caractéristiques.

2- Démonter que (C) et (C') sont sécants en deux points A et B à déterminer

3- Vérifier que H(3 ; 1) appartient à (C) et écrire une équation de la tangente (T) à (C) en H.

4- Démontrer que (T) coupe (C') en deux points à préciser.

5- k étant un réel quelconque, on admet que $x^2+y^2-2kx-4ky+10(k-1)=0$ est l'équation d'un cercle (C_k). Démontrer que $\forall k \in \mathbb{R}$, (C_k) passe par deux points fixes I et J.

Exercice n°37
On considère (C) : $x^2+y^2-2x-4y=0$ et la famille des droites (D_m) : 2x+y-m=0 où $\forall m \in \mathbb{R}$

1.) Montrer que toutes les droites (D_m) ont la même direction

2- a) Déterminer le centre I et le rayon de (C).

b) Soit d la distance de I à (D_m). Montrer que $d = \frac{1}{5}m^2-2m+5$

3.) Déduire pour quelles valeurs de m, (D_m) est tangente à (C). Tracer (C) et les droites correspondantes.

Exercice n°38
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On donne le point A(3 ;5) ; $(\mathcal{C})$: $x^2+y^2-2x-4y+4=0$; Ω(0 ; 1) et $\vec{u}(1;2)$.

1. a) Montrer que $(\mathcal{C})$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   b) Déterminer l'équation paramétrique de $(\mathcal{C})$.
   b) Vérifier que A n'appartient pas à $(\mathcal{C})$.
2. Soit (T) et (T') les tangentes à $(\mathcal{C})$ passant par A. On note P et Q les points d'intersections de (T) et $(\mathcal{C})$ et de (T') et $(\mathcal{C})$ respectivement.
   a) Montrer que les coordonnée de P et Q sont solutions du système : $\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y+4=0 \\ x^2+y^2-4x-8y+18=0 \end{cases}$.
   b) Résoudre ce système et déterminer les coordonnées de P et Q. Prendre $x_P > x_Q$.
   c) Ecrire une équation cartésienne de (T).
3. On note h l'homothétie de centre Ω et de rapport 2, t la translation de vecteur $\vec{u}$.
   a) Déterminer l'expression analytique de la composée h∘t.

b) Déterminer l'image (T'') de (T) par $h \circ t$.

Exercice n°39

Le plan est muni d'un repère orthonormé directe (O, I, J) . ($\mathcal{C}$) désigne le cercle de centre O et de rayon 1. On pose K(-1, 0), A désigne le milieu de [OK]. ($\mathcal{C}$') est le cercle de centre A passant par J. ($\mathcal{C}$') rencontre l'axe (OI) en deux points dont l'un noté B a une abscisse positive.

1. (a) Ecrire une équation cartésienne de ($\mathcal{C}$').

   (b) Prouver que $X_B = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. On désigne par C le milieu du segment (OB). La perpendiculaire en C à l'axe des abscisses coupe le cercle ($\mathcal{C}$) en deux points dont l'un noté M, a une ordonnée positive.

On pose $\alpha = Mes(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$

(a) Prouver que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

(b) En déduire $\sin\alpha$, $\cos 2\alpha$ et $\cos 3\alpha$.

3. (a) Résoudre dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $\cos 2x = \cos 3x$.

   (b) En déduire la valeur exacte de α.

Exercice n°40

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On donne les points A(3 ;5), B$\left(\frac{9}{5} ; \frac{13}{5}\right)$ et $(\mathcal{C})$: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.

4. a) Montrer que $(\mathcal{C})$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

   b) Déterminer l'équation paramétrique de $(\mathcal{C})$.

   b) Vérifier que A n'appartient pas à $(\mathcal{C})$ et B appartient à $(\mathcal{C})$.

5. Ecrire une équation cartésienne de la tangente à $(\mathcal{C})$ en B.

Exercice n°41

Soit A(5 ;1), B(1 ;2) et (Γ) le cercle d'équation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + 3\cos\theta \\ y = 1 + 3\sin\theta \end{cases}$

6. Donner une équation cartésienne du cercle de centre Ω(-3 ;4) et de rayon 5.
7. Donner le centre et le rayon du cercle (Γ): $x^2 + y^2 + x + y = 0$.
8. Rechercher les points d'intersections de (Γ) et la droite (D): $y = x - 1$.
9. Quelle est la position de (D) par rapport à (Γ) ?