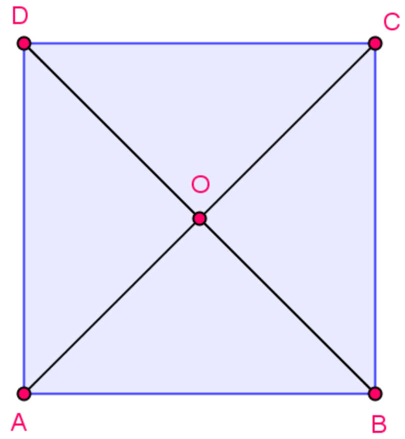
ISOMETRIES

LISTE DES COMPETENCES	
CODE	**DENOMINATION**
I101	Construire l'image d'un point par : une rotation, une translation une symétrie orthogonale
I102	Construire l'image d'une droite par : une rotation, une translation une symétrie orthogonale
I103	Décomposer une rotation
I104	Décomposer une translation
I105	
I106	
I107	
I108	
I109	
I110	
I111	
I112	
I113	
I114	
I115	
I116	
I117	
I118	
I119	
I120	
I121	
I122	
I123	

Exercice n°1

On considère un carré direct ABCD de centre O



1) Déterminer les droites Δ_1 et Δ_1' telles que :

$R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)} = S_{\Delta_1'} \circ S_{(AB)} = S_{(AB)} \circ S_{\Delta_1}$

2) Déterminer les droites Δ_2 et Δ_2' telles que :

$R_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)} = S_{\Delta_2'} \circ S_{(AC)} = S_{(AC)} \circ S_{\Delta_2}$

3) Déterminer les droites Δ_3 et Δ_3' telles que :

$t_{\overrightarrow{AC}} = S_{\Delta_3'} \circ S_{(BD)} = S_{(BD)} \circ S_{\Delta_3}$

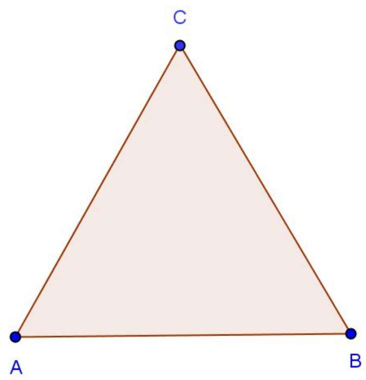
4) Déterminer les droites Δ_4 et Δ_4' telles que :

$S_O = S_{\Delta_4'} \circ S_{(AC)} = S_{(AC)} \circ S_{\Delta_4}$

Exercice n°2

ABC est un triangle équilatéral direct tel que

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\, 2\pi)$$



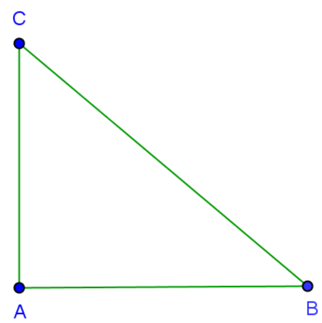
Déterminer les composées suivantes :

1. $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$
2. $S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$
3. $S_{(AC)} \circ S_{(AC)}$
4. $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$
5. $S_{(AB)} \circ S_{(BC)}$
6. $S_{(AC)} \circ S_{(BC)}$

Exercice n°3

ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\, 2\pi)$$



Déterminer les composées suivantes :

1. $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$
2. $S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$
3. $S_{(AC)} \circ S_{(AC)}$
4. $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$
5. $S_{(AB)} \circ S_{(BC)}$
6. $S_{(AC)} \circ S_{(BC)}$

Exercice n° 4

On considère un carré direct ABCD de centre O.

1) Déterminer les droites Δ_1 et Δ_1' telles que $R\left(A;\frac{\pi}{2}\right)=S_{\Delta_1'}\circ S_{(AB)}=S_{(AB)}\circ S_{\Delta_1}$
2) Déterminer les droites Δ_2 et Δ_2' telles que $R\left(O;-\frac{\pi}{2}\right)=S_{\Delta_2'}\circ S_{(AC)}=S_{(AC)}\circ S_{\Delta_2}$
3) Déterminer les droites Δ_3 et Δ_3' telles que $t_{\overrightarrow{AC}}=S_{\Delta_3'}\circ S_{(BD)}=S_{(BD)}\circ S_{\Delta_3}$
4) Déterminer les droites Δ_4 et Δ_4' telles que $S_O=S_{\Delta_4'}\circ S_{(AC)}=S_{(AC)}\circ S_{\Delta_4}$

Exercice n°5

Soit [AB] un segment.

Où sont situés les centres des rotations qui transforment A en B ?

Exercice n°6

Soit (D) une droite et O un point extérieur à cette droite.

a) Construire l'image de (D) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

b) Construire l'image de (D) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice n°7

Soit ABC un triangle. Soit A' un point distinct de A.

Soit O un point de la médiatrice de [AA'].

Soit r la rotation de centre O qui transforme A en A'.

T racer l'image du triangle ABC par cette rotation.

Exercice n°8

Soit A et B deux points distincts.

a) Construire le centre O de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme A en B.

b) Construire le centre O' de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en B.

Exercice n°9

Soit (C) un cercle et A un point n'appartenant pas à ce cercle.

A tout point M de (C), on associe le point M' tel que le triangle AMM' soit équilatéral avec

$\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit (C) ?

Exercice n°10

Soit r le quart de tour direct de centre O. a est un réel strictement positif.

Soit M' l'image de M par r.

Quel est l'ensemble des points M tels que MM'=a ?

Exercice n°11

Soit ABC un triangle de sens direct et H son orthocentre. Soit ABD un triangle rectangle isocèle en A avec $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$. Soit ACE un triangle rectangle isocèle en A avec $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)=-\frac{\pi}{2}$. Soit F le symétrique de E par rapport à A. Démontrer que (FD)//(AH) et que (AH) est la médiatrice du triangle AED.

Exercice n°12

Soit ABC un triangle. A l'extérieur de ce triangle, on construit les triangles équilatéraux BCA', CAB' et ABC'.

a) Démontrer que BB'=CC' et que $\left(\overrightarrow{C'C},\overrightarrow{BB'}\right)=\frac{\pi}{3}$.

b) Démontrer que AA'=BB'=CC' et que $\left(\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{BB'}\right)=\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{CC'}\right)=\left(\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'}\right)=-\frac{2\pi}{3}$.

Exercice n°13

Soit ABCD un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

Soit M un point du segment [BC] distinct de C. Le cercle circonscrit au triangle AMC recoupe (CD) en M'. O est le centre de ce cercle.

a) Montrer que AOM est rectangle isocèle.

b) Démontrer que DM'=BM

Exercice n°14

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Soit M un point de [AB] et N un point de [AC] tels que BM=CN.

a) Déterminer le centre O et l'angle de la rotation r telle que r(B)=C et r(M)=N.

b) Prouver que O appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice n°15

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Soit E le symétrique de A par rapport à C ; soit D celui de B par rapport à C.

a) Déterminer le centre I et l'angle α_1 de la rotation r_1 telle que $r_1(A)=C$ et $r_1(B)=D$.

b) Déterminer le centre J et l'angle α_2 de la rotation r_2 telle que $r_2(A)=C$ et $r_2(B)=E$

c) Montrer que I est le centre du cercle circonscrit au triangle JAC.

Exercice n°16

Soit OAB un triangle rectangle isocèle en O tel que OA = 5 cm.

La rotation de centre O qui transforme A en B transforme B en C et C en D.

1) Démontrer que O est le milieu des segments [AC] et [BD].

2) Calculer les longueurs des segments [AB] et [BC].

3**)** Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Exercice n°17

Soit ADC et ABE deux triangles rectangles et isocèles en A.

Soit M le milieu du segment [DE] et H le point d'intersection des droites (AM) et (BC).

1) Quelle est l'image de E par la rotation de centre A qui transforme C en D ?

2) Construire les points F et M', images respectives de D et M par cette rotation.

3) Démontrer que A est le milieu du segment [CF].

4) Démontrer que la droite (AM') est parallèle à la droite (BC).

5) En déduire que la droite (AH) est une hauteur du triangle ABC.

Exercice n°18

Soit ABC un triangle isocèle avec AB = AC et D un point extérieur à ce triangle.

1) Construire le point E image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$

2) Construire l'image F de D par la rotation de centre A qui transforme B en C.

3) Démontrer que le triangle CEF est isocèle.

Exercice n°19

On donne un vecteur $\vec{u}$, un point I et une droite Δ.

Construire un cercle (C) de centre O et de rayon 4cm.

Construire un triangle ABC inscrit dans ce cercle.

On note (F) la figure obtenue.

1) Construire (F_1) image de (F) par la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$

2) Construire (F_2) image de (F) par la symétrie centrale de centre I .

3) Construire (F_3) image de (F) par la symétrie orthogonale d' axe Δ.

4) Construire (F_4) image de (F) par la rotation de centre I , d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice n°20

(C) est un cercle de centre O, de diamètre [AB]. M est un point de ce cercle distinct de A et de B.

A', B' et M' sont les images de A, B et M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OM}$.

a) Quelle est la nature du triangle A'M'B' ?

b) Que représente M pour ce triangle ?

Exercice n°21

ABC est un triangle. M, N et R sont les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

P est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BN}$.

Q est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.

Démontrer que les points R, N, Q et P sont alignés.

Exercice n°22

Deux cercles C_1 et C_2 de centre O_1 et O_2, de même rayon, sont sécants en A et B.

La parallèle Δ à (O_1O_2) passant par A recoupe C_1 en M_1 et C_2 en M_2.

1) Démontrer que les quadrilatères $O_1M_1AO_2$ et $O_2O_1AM_2$ sont des parallélogrammes.

2) Existe-t-il des positions particulières des cercles C_1 et C_2 pour lesquelles ces quadrilatères sont des losanges ?

Exercice n°23

ABCD est un parallélogramme de centre O.
Une droite Δ qui passe par A coupe (BC) en E.
La parallèle à Δ passant par C coupe (AD) en F.
a) Quelle est l'image de Δ par la symétrie de centre O ?
b) Quelle est l'image de E par la symétrie de centre O ?
c) En déduire que le quadrilatère BEDF est un parallélogramme.

Exercice n°24

ABCD est un trapèze inscrit dans un cercle et tel que (AB)//(CD).
a) Montrer que les segments [AB] et [DC] ont la même médiatrice (d).
b) Montrer que le trapèze ABCD est isocèle.
c) (AD) et (BC) se coupent en I. (AC) et (BD) se coupent en J.
Montrer que O, I et J sont alignés.

Exercice n°25

Soit (D) une droite. O et A sont deux points de cette droite.
Une droite (Δ) coupe la droite (D) en A.
Soit A' le symétrique de A par rapport à O
Soit (Δ') la droite symétrique de (Δ) par rapport à O.
Le point O se projette orthogonalement en H sur (Δ) et en H' sur (Δ').
Démontrer que H' est le symétrique de H par rapport à O.

Exercice n°26

Soit ABCD un parallélogramme et I un point intérieur à ce parallélogramme.
Soit J le symétrique de I par rapport au point A.
Soit K le symétrique de J par rapport au point B.
Soit L le symétrique de K par rapport au point C.
Démontrer que I est le symétrique de L par rapportà D. (On utilisera le théorème des milieux avec les triangles JKL puis JIL).

Exercice n°27

Soit ABC un triangle. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et t' la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$

A'B'C' est l'image du triangle ABC par la translation t.

A"B"C" est l'image du triangle ABC par la translation t'.

Démontrer que C est le milieu de [A"C'].

Exercice n°28

(D) est la médiatrice d'un segment [BC].

A et M sont deux points distincts de la droite (D).

Les droites (MC) et (AB) se coupent en N.

Les droites (MB) et (AC) se coupent en P .

Démontrer que N et P sont symétriques par rapport à (D), que $(NP) \perp (AM)$ et que AN = AP.

Exercice n°29

ABC est un triangle dont les médianes [BB'] et [CC'] ont la même longueur.

G est le centre de gravité du triangle ABC.

a) Démontrer que la médiatrice (d) de [BC] passe par G et que B' et C' sont symétriques par rapport à (d).

b) Qu'en résulte-t-il pour le triangle ABC ?

Exercice n°30

(d) est une droite et s est la réflexion d'axe (d). A et B sont deux points.

(Δ) est une droite passant par A.

a) Construire l'image (Δ') de (Δ) par s.

b) Comment choisir (Δ) pour que (Δ') passe par B ?

Exercice n°31

d_1 et d_2 sont deux droites perpendiculaires.

s_1 et s_2 sont les réflexions d'axe d_1 et d_2.

A et B sont deux points.

(D) est une droite passant par A.

a) Construire les images D_1 et D_2 de (D) par s_1 et s_2.

b) Comment choisir (D) pour que D_2 passe par B ?

Exercice n°31

ABC est un triangle isocèle avec AB = AC.
A l'extérieur de ce triangle, on construit les triangles équilatéraux ABC' et ACB'.
Les droites (CC') et (BB') se coupent en I.
Les droites (CB') et (BC') se coupent en J
a) Démontrer que C' et B' sont symétriques par rapport à la médiatrice (d) de [BC].
b) En déduire que les points A, I et J sont alignés.

Exercice n°32

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On donne $E(2;0)$ et F l'image de E par la rotation de centre O et d'angle . I est le milieu de $[EF]$.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes de F et I.
2. **(a)** Déterminer la nature du triangle OEF.
   (b) En déduire la mesure principale de $(\vec{\imath};\overrightarrow{OI})$.
3. Déduire des questions 1 et 2 , les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{2-\sqrt{2}}\cos x+\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin x=-1$

Exercice n°33

On considère un parallélogramme ABCD de centre O. Soient I, J, K, L les milieux respectifs des segments [AB]; [BC]; [CD]; [DA]. Soit t la translation transformant A en I.
Déterminer les images par t de I ; D ; K ; L ; O (Justifier)

Exercice n°34

Le plan est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit $\vec{u}(a;b)$ et $M(x;y)$.

Déterminer, en fonction de x et y, les coordonnées du point M'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Exercice n°35

Soient A et B deux points, G le barycentre de (A ; α) et (B ; β) (avec α + β ≠0).
1°) Démontrer que si test une translation alors t(G) est le barycentre de (t(A) ; α) et (t(B) ; β).
2°) Démontrer que si h est une homothétie alors h(G) est le barycentre de (h(A) ; α) et (h(B) ; β).

Exercice n°36

Soit ABC un triangle ni isocèle ni rectangle. I le milieu de [BC] et (Δ) la médiatrice de [BC]. A' est le symétrique de A par rapport à (BC) et A'' le symétrique de A par rapport à I.
Soit K le point d'intersection de (CA') et de (BA''). On se propose de montrer que K appartient à (Δ).
1. Soit S_I la symétrie de centre I. Déterminer les images de A, B et C par S_I.
2. Soit s_{BC} la réflexion d'axe (BC). Déterminer les images de A, B et C par s_{BC} .
3. Soit s_Δ la réflexion d'axe (Δ) . Déterminer la nature et les caractéristiques de $s_\Delta\circ s_{BC}$. En déduire que $S_I\circ s_{BC}=s_\Delta$.
4. Déterminer l'image de A' par $S_I\circ s_{BC}$. En déduire l'image de (CA') par s_Δ. Que peut on dire de K ?

Exercice n°37

Dans un repère orthonormé, une transformation T a pour expression analytique:

$$\begin{cases} X'=\frac{4}{5}X+\frac{3}{5}Y+1 \\ Y'=\frac{3}{5}X-\frac{4}{5}Y-3 \end{cases}$$

X' et Y' sont les coordonnées de l'image d'un point $M(X ; Y)$
1. Nous avons un carré *DEFG* dont les sommets sont :
$D(3 ; 3)$ $E(7 ; 3)$ $F(7 ; 7)$ $G(3 ; 7)$
Calculer les coordonnées de *H*, *I*, *J* et *K* images de *D*, *E*, *F*, et *G* dans la transformation T.
Démontrer que *HIJK* est un carré et qu'il a les mêmes dimensions que *DEFG*.
En supposant que la transformation T est une symétrie orthogonale, construire son axe.
2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants dans la transformation T. Soit (Δ) l'ensemble trouvé.
b. Montrer que pour tout point *M* d'image *M'*, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe et que cette direction est perpendiculaire à celle de (Δ).
c. Soit $M(X ; Y)$ quelconque, calculer les coordonnées de *m* milieu de [*MM'*] en fonction de *X* et *Y*. Montrer que *m* appartient à (Δ).
d. Pouvez vous en déduire que la transformation T est une symétrie orthogonale d'axe (Δ) ?

Exercice n°38

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la rotation *R* de centre O, d'angle $\frac{\pi}{3}$.
1. Soit *M* un point de coordonnées polaires $(r ; \theta)$ d'image par *R* le point *M'* de coordonnées polaires (r', θ'). Quelles relations existe-t-il entre *r* et *r'* puis entre θ et θ' ?
2. En déduire que si *M* a pour coordonnées cartésiennes $(x ; y)$ et *M'* a pour coordonnées $(x' ; y')$ alors on a :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}.$$

3. Déterminer les images *A'* et *B'* par *R* des points $A(0 ; 1)$ et $B(1 ; 0)$. Déterminer une équation de la droite (*AB*) ainsi qu'une équation de (*A'B'*). Quel est l'angle entre ces deux droites ?
4. Généraliser les questions 1. et 2. à une rotation de centre O, d'angle θ quelconque puis à une rotation de centre $\Omega(\alpha ; \beta)$ et d'angle θ.

Exercice n°39

Dans un plan P on considère un triangle équilatéral *ABC* inscrit dans un cercle Γ. Soit *M* un point de Γ distinct de *A* et *C*, situé sur celui des arcs *AC* dont *B* n'est pas élément. *I* est le point du segment [*MB*] tel que *MI* = *MA*.
1. Montrer que le triangle *IMA* est équilatéral.
2. On oriente le plan P de sorte qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ soit $+\frac{\pi}{3}$. Soit *r* la rotation de centre *A* d'angle $+\frac{\pi}{3}$. Déterminer les images de *B* et *I* par *r*.
3. En déduire $MA + MC = MB$.

Exercice n°40

Dans un plan orienté, on considère un carré *PQRS* de centre *O* pour lequel l'angle $\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right)$ est égal à $+\frac{\pi}{2}$. Soit *A*, *B*, *C*, *D* un parallélogramme tel que *P*, *Q*, *R*, *S* appartiennent respectivement aux segments [*AB*], [*BC*], [*CD*], [*DA*].
1. Montrer que les droites (*AD*) et (*DC*) sont les images des droites (*BC*) et (*AB*) par la symétrie de centre *O*. Montrer que *O* est le centre du parallélogramme *ABCD*.
2. Soit (Δ) l'image de la droite (*AB*) par la rotation de centre *O*, d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Etablir que *Q* est commun à (Δ) et (*BC*).

3. Soient (1 ; −2), (3 ; 2), (−1 ; 2) et (−3 ; −2) les coordonnées de *A*, *B*, *C* et *D* dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. En utilisant la question précédente, construire un carré inscrit dans le parallélogramme *ABCD* (on donnera les coordonnées des sommets du carré).

Exercice n°41

Dans le plan orienté on donne deux droites parallèles D et Δ, et un point *A* n'appartenant à aucune des deux droites. Construire un triangle *ABC* vérifiant simultanément les conditions suivantes :

- *ABC* est rectangle en *A*.
- *ABC* est isocèle.
- *B* est sur D et *C* est sur Δ.

1. Précisez le nombre de
solutions au problème posé.
2. Généralisez à un triangle isocèle de sommet *A*.

Exercice n°42

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. On considère l'application *f* de P dans lui-même qui, à tout point *M*(*x* ; *y*), associe le point *M*'(*x*' ; *y*') défini par

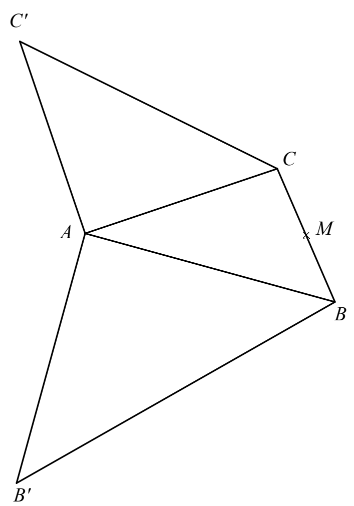
$$\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Montrer que, pour tout point *M*, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur fixe.

2. Déterminer l'ensemble des points invariants par *f*.
3. Quelle est la nature de l'application *f* ?

Exercice n°43

Le triangle *ABC* est quelconque, *M* est le milieu du segment [*BC*]. Les triangles *BAB*' et *CAC*' sont rectangles isocèles de sommet *A*.



1. Soit *h* l'homothétie de centre *B* de rapport 2. Déterminer les images de *A* et *M* par *h*.
2. Trouver une rotation *r* telle que $r \circ h$ transforme *A* en *B*' et *M* en *C*'.
3. En déduire que les droites (*AM*) et (*B*'*C*') sont perpendiculaires et que $B'C' = 2AM$.

Exercice n°44

Soit un triangle isocèle (*OAB*) de sommet *O* et un point *P* variable du segment ouvert]*AB*[. La parallèle menée de *P* à la droite (*OB*) coupe (*OA*) en *A*' et la parallèle menée de *P* à la droite (*OA*) coupe (*OB*) en *B*'.

1. Démontrer que *OA*' = *BB*'.

2. En déduire qu'il existe une rotation *r* telle que $r(O) = B$ et $r(A') = B'$ dont on déterminera l'angle en fonction de $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$. Démontrer que $r(A) = O$. Déterminer alors le centre de cette rotation.

3. Démontrer que les points *O*, *A'*, *B'*, Ω sont sur un même cercle.

Exercice n°45

1. On considère un point fixe *F* et une droite (Δ) ne passant pas par *F*. Soit (D) la perpendiculaire à (Δ) passant par *F* et *O* le point d'intersection de (D) et (Δ).

On appelle *parabole* de sommet *O*, de *foyer F* et de *directrice* (Δ) l'ensemble (P) des points *M* tels que $MF = MH$ où *H* est le projeté orthogonal de *M* sur (Δ).

a. Faire une construction de (P) à l'aide de votre logiciel de géométrie préféré.

b. En considérant le repère orthonormal $\left(O\,;\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OF}\right)$ donner une équation de (P) sous la forme $y = f(x)$.

c. Montrer que la médiatrice de [*HF*] passe par *M* et est la tangente à (P) en *M*.

d. Si on avait choisi un repère comme $\left(O\,;\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OJ}\right)$ quelle aurait été l'équation de (P) ? Même question avec un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{j} = \alpha\overrightarrow{OF}$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(I\,;\vec{i}, \vec{j})$; α est un réel non nul, $O_1(\alpha\,;0)$ et $O_2(-\alpha\,;0)$. P_1 est la parabole de sommet *I* et de foyer O_1, P_2 la parabole de sommet O_1 et de foyer O_2.

a. Montrer que les équations de P_1 et P_2 sont $y^2 = 4\alpha x$ et $y^2 = -8\alpha x + 8\alpha^2$.

b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection M_α et N_α des deux paraboles.

c. Quel est l'ensemble des points M_α et N_α quand α décrit $\mathbb{R}^*$?

d. Montrer que P_1 et P_2 sont respectivement les images des paraboles p_1 et p_2 d'équations $y^2 = 4x$ et $y^2 = -8x + 8$ par l'homothétie de centre *I* et de rapport α .

En déduire que $\overrightarrow{IM_\alpha} = \alpha\overrightarrow{IM_1}$ et
$\overrightarrow{IN_\alpha} = \alpha\overrightarrow{IN_1}$ et retrouver le
résultat du c.

Exercice n°46
On considère dans un plan P un triangle *ABC*, *B*' le milieu de [*AC*], *C*' celui de [*AB*], *I* le barycentre du système {(*A* ; 2) , (*B* ; 2), (*A* ; 1), (*C* ; 1)} et *D* celui de {(A ; 3), (B ; 2)}.
1. Montrer que *I* est le barycentre de {(*B*' ; 1), (*C*' ; 2)} et de {(D ; 5), (C ; 1)}. En déduire une construction géométrique simple de *I*. Faire la figure.
2. La droite (*AI*) coupe (*BC*) en *E*. Préciser la position de *E* sur [*BC*].
3. *B* et *C* restent fixes, *A* se déplace dans le plan de sorte que *AE* soit constant. Déterminer et construire l'ensemble des points *A*, des points *I* et des points *D*.

Exercice n°47
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On donne $E(2;0)$ et F l'image de E par la rotation de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. I est le milieu de $[EF]$

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes de F et I.
2. **(a)** Déterminer la nature du triangle OEF.
   (b) En déduire la mesure principale de $(\vec{\imath};\overrightarrow{OI})$.
3. Déduire des questions 1 et 2 , les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{2-\sqrt{2}}\cos x+\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin x=-1$

Exercice n°48
Dans le plan , on considère un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{4}$

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CI}\right)=-\frac{\pi}{2}$

1. Faire une figure , que l'on complètera au fur et à mesure. On prendra $AB = 5$ cm.
2. Soit r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $f = r_C \circ r_A$.
   (a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$.
   (b) Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O.
   (c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABOC$?
3. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C' l'image de C par s , H le milieu de $[BC]$ et H' son image par s.
   (a) Donner une mesure de l'angle de s.
   (b) Montrer que C' appartient à la droite (OA).
   (c) Donner l'image par s du segment $[OA]$ et montrer que H' est le milieu de $[OB]$.
   (d) Montrer que $(C'H')$ est perpendiculaire à (OB).
   (e) En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

Exercice n°49
Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul.
Montrer qu'une droite (d) est globalement invariante par t, c'est-à-dire t(d) = d si et seulement si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d).

Exercice n°50
Soit O(0 ; 0) un point du plan, et α un nombre réel. L'on se propose de déterminer l'expression analytique de la rotation de centre O et d'angle α. Soit M(x, y)un point du plan et M'(x', y')son

image par r(O, α). On pose OM = R, β = $mes(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}})$

1. Faire une figure.
2. Montrer que x'= Rcos(α + β) et y'= Rsin(α + β).
3. Exprimer x en fonction de cos β et y en fonction de sin β.
4. En déduire que x'= x cos α − y sin α et y'= y cos α + x sin α.
5. ***Application.***

Déterminer l'expression analytique de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$

6. Déterminer l'expression analytique de h∘r où h est l'homothétie de centre O et de rapport k et r est la rotation de centre O et d'angle α.

Exercice n°51

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct OAB rectangle et isocèle en O. On notera R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\frac{\pi}{2}$ et S_0 la symétrie de centre O.

On place un point C non situé sur la droite (AB). On trace les carrés BEDC et ACFG directs. On a donc $\left(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}}\right) = \frac{\hat{\pi}}{2}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}}\right) = \frac{\hat{\pi}}{2}$.

1. a. Réaliser la figure.

b. Déterminer $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$ composée des symétries orthogonales d'axes (AB) et (AO).

2. a. Déterminer une droite (Δ) telle que $R_B = S_{(AB)} \circ S_{(\Delta)}$.

b. Démontrer que $R_A \circ R_B = S_O$.

3. a. Déterminer l'image de E par $R_A \circ R_B$.

b. En déduire que O est le milieu du segment [EG].

4. On note R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D de même angle$\frac{\pi}{2}$.Etudier l'image de C par la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$ puis déterminer la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$.

Exercice n°52

ABCD est un carré direct dont les diagonales se coupent en I . On appelle J le milieu de [BC], r est la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$. t est la translation de vecteur$\overrightarrow{BC}$.

1. a. Comment choisir la droite (D) pour avoir $t = S_{(IJ)} \circ S_{(D)}$?

b. Comment choisir la droite (D') pour avoir $r = S_{(D')} \circ S_{(IJ)}$?

2. A l'aide de la question 1. déterminer la nature de la transformation r ∘ t .
3. En décomposant à nouveau astucieusement t et r , déterminer la nature de la transformation t ∘ r .

Exercice n°53

ABCD est un carré de sens direct, de côté 4 cm et de centre O. On considère l'ensemble (Γ) des points M tels que $\left\|-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\|$.

1. a. Déterminer et construire le barycentre des points pondérés (A; -1), (B;1) , (C,2).

b. Montrer que $C \in (\Gamma)$, puis déterminer et construire (Γ).

2. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications suivantes.
i. $S_{(DC)} \circ S_{(AB)}$ ii. $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ iii. $S_{(BD)} \circ S_{(AC)}$ iv. $S_{(DC)} \circ S_{(AC)}$.
b. Dans chacun des cas déterminer la droite Δ vérifiant cette égalité.
i. $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(BC)} \circ S_{(\Delta)}$ ii. $R\left(B, \frac{\pi}{2}\right) = S_{(\Delta)} \circ S_{(BD)}$.
c. Déterminer et construire l'image (Γ') de (Γ) par $R\left(B, \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice n°54
Soit O(0 ; 0) un point du plan, et α un nombre réel. L'on se propose de déterminer l'expression analytique de la rotation de centre O et d'angle α. Soit M(x, y)un point du plan et M'(x', y')son image par r(O, α). On pose OM = R, β = $mes(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}})$
1. Faire une figure.
2. Montrer que x'= Rcos(α + β) et y'= Rsin(α + β).
3. Exprimer x en fonction de cos β et y en fonction de sin β.
4. En déduire que x'= x cos α − y sin α et y'= y cos α + x sin α.
5. ***Application.***
Déterminer l'expression analytique de la rotation de centre Oet d'angle $\frac{\pi}{4}$
6. Déterminer l'expression analytique de h∘r où h est l'homothétie de centre O et de rapport k et r est la rotation de centre O et d'angle α.

Exercice n°55
Soit ABCD un carré direct de centre I ; t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$; r le quart de tour direct de centre I et Δ la droite passant par I et orthogonale aux droites (AD) et (BC).
1. Justifier l'existence d'une droite d telle que $t = S_\Delta \circ S_d$ et la déterminer.
2. Justifier l'existence d'une droite d' telle que $r = S_{d'} \circ S_\Delta$ et la déterminer.
3. En décomposant astucieusement t et r en composée de réflexions, déterminer les transformations $r \circ t$ et $t \circ r$.

Exercice n°56
Le plan affine euclidien P est rapporté au repère orthonormé. Soit f l'application de P dans P qui à tout point M(x ;y) associe le point M'(x' ;y') tels que :
$$\begin{cases} x' = y+1 \\ y' = x+2 \end{cases}$$
1 °) Montrer que f est une isométrie affine, f est-elle un déplacement ? un antidéplacement ?
2°) Démontrer que l'ensemble des points I milieu des segments [MM'] est une droite D.
3°) Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale S par rapport à D.
4°) Déterminer tel que $f = S \circ t$

Exercice n°57