ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

EXERCICE 1

Compléter le tableau de conversion suivant :

Radian	π					1	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
Degré		$20°$	$60°$	$65°$	1					

EXERCICE 2

Placements de points sur le cercle

Le cercle trigonométrique suivant est gradué de $\frac{\pi}{12}$ en $\frac{\pi}{12}$, vous pouvez donc placer la majorité des points directement, sauf les multiples de $\frac{\pi}{8}$

Placer sur le cercle les points images des réels suivants : 0 et π

Puis $\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{15\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8}$

Et enfin $\frac{71\pi}{12}$; $-\frac{35\pi}{12}$

EXERCICE 3

Sur le cercle trigonométrique de centre O, placer dans chaque cas, deux points A et B tels que la mesure principale de $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$ soit :

$-\frac{2\pi}{3}$ $\qquad\frac{\pi}{2}$ $\qquad-\frac{\pi}{2}$ $\qquad\frac{3\pi}{4}$ $\qquad-\frac{\pi}{6}$

EXERCICE 4

Dans chaque cas, déterminer la mesure principale de l'angle :

$\frac{5\pi}{3}$ $\qquad-\frac{40\pi}{3}$ $\qquad\frac{35\pi}{6}$ $\qquad\frac{21\pi}{4}$ $\qquad\frac{53\pi}{2}$ $\qquad-\frac{13\pi}{7}$

EXERCICE 5

C est le cercle trigonométrique de centre O et A est un point de C. Dans chaque cas, placer le point M tel qu'une mesure en radians de $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}\right)$ soit :

a) $\frac{7\pi}{2}$ b) $\frac{23\pi}{4}$ c) $-\frac{\pi}{6}$ d) $-\frac{47\pi}{3}$ e) $\frac{1308\pi}{2}$ f) $-\frac{33\pi}{4}$

g) $\frac{67\pi}{5}$ h) $-\frac{65\pi}{7}$

EXERCICE 6

Soit x un nombre réel de l'intervalle $[-\pi;0]$ tel que $\cos x = -\frac{1}{5}$

1. Placer sur le cercle trigonométrique le point M associé à ce nombre réel.
2. Déterminer le signe , puis la valeur exacte de sin x .

EXERCICE 7

Tracer un hexagone régulier ABCDEF de centre O. Donner, en radians, la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}}\right)$

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}}\right)$

EXERCICE 8

Lecture de cosinus et sinus sur le cercle trigonométrique

Donner les valeurs exactes des cosinus et sinus suivants, après avoir placé sur le cercle trigonométrique les réels correspondants.

1. $\cos(2\pi)$
2. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
3. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) =$
4. $\sin\pi =$
5. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$
6. $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right) =$
7. $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$
8. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$
9. $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$

EXERCICE 9

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse

1. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}$
2. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin x + 1$, pour tout réel x
3. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$
6. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
7. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
8. $\cos(x+2\pi) = \cos x$
9. $\sin(-x) = \sin x$
10. si x est positif, alors $\sin x$ est positif aussi

EXERCICE 10

Placer, sur le cercle trigonométriques ci-dessous les points M, N et P tels que

1. $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right) = \frac{27\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON}}\right)=-\dfrac{38\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$
3. $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OP}}\right)=x, \text{avec } 3x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

EXERCICE 11

Soir (C) un cercle de centre A et B un point de (C)

1. Construire les points C, D, E et F du cercle (C) tels que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ $\quad\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$ $\quad\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}\right)=\dfrac{7\pi}{6}$ $\quad\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}\right)=-\dfrac{3\pi}{4}$

2. Déterminer une mesure puis la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right)$ $\quad\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}}\right)$ $\quad\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC}}\right)$ $\quad\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}}\right)$

EXERCICE 12

ACE est un triangle isocèle direct de sommet principal A et tel que AC=5 et $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AC}},\overrightarrow{\mathrm{AE}}}\right)=\dfrac{2\pi}{5}(2\pi)$

1. Tracez le triangle équilatéral direct AEF et le triangle ABC isocèle rectangle direct en A.
2. Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}}\right)$ $\quad\left(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BC}}\right)$ $\quad\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{CB}}\right)$ $\quad\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{EC}}\right)$

EXERCICE 13

1. Sachant que $\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\\ \sin x=\dfrac{1}{3}\end{cases}$ et sans utiliser de calculatrice, donner une valeur exacte de $\cos x$ et de $\tan x$
2. Tout le monde sait bien que $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (on ne cherchera pas à démontrer ce résultat !). Calculer $\sin\dfrac{\pi}{8}$

EXERCICE 14

Pour tout réel x, simplifier l'expression $A(x)=\cos(3\pi-x)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(-\dfrac{3\pi}{2}-x\right)$

EXERCICE 15

1. Déterminer la mesure de l'angle x vérifiant : $\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

2. Sachant que $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ (on ne cherchera pas à démontrer ce résultat !), déterminer $\cos\frac{11\pi}{10}$

3. Déterminer une valeur exacte de x sachant que $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos x=-\frac{1}{2}$

4. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près en radians de a sachant $\cos a=-0,25$ et $a\in[-\pi;0]$

EXERCICE 16

1. Simplifier au maximum, pour tout réel t, l'expression $(1-\cos t)(1+\cos t)$
2. Démontrez que pour tout nombre réel x, : $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos^2 x-\sin^2 x$, puis que $\cos^4 x-\sin^4 x=2\cos^2 x-1$

EXERCICE 17

1. Démontrer que pour tout réel x, $\cos(2x)=2\cos^2 x-1$
2. Puisque vous connaissez $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{3}$, déterminez une valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ puis de $\cos\frac{\pi}{24}$

EXERCICE 18

Toutes les constructions de cette activité sont à faire à la règle et au compas. Toutes les mesures d'angles seront données en radians.

Soit (C) un cercle de centre 0, de rayon 8 cm et A un point de (C).

1) Construire en justifiant le point B tel que le triangle OAB soit équilatéral direct. Donner une mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

2) Construire en justifiant le point D tel que le triangle OAD soit un triangle direct rectangle et isocèle en O. Donner une mesure de l'angle $\widehat{AOD}$.

3) Construire en justifiant le point E tel que le triangle OAE soit un triangle direct, isocèle en O tel que $\widehat{AOE}=\frac{\pi}{4}$ rad.

4) Construire en justifiant le point F tel que le triangle OFD soit équilatéral direct. Calculer une mesure de l'angle $\widehat{AOF}$.

5) Construire en justifiant le point G tel que le triangle OAG soit direct, isocèle en O tel que $\widehat{AOG}=\frac{2\pi}{3}$ rad.

6) Construire en justifiant le point H tel que le triangle OAH soit direct, isocèle en O tel que $\widehat{AOH}$ = $\frac{3\pi}{4}$ rad.

7) Construire en justifiant le point K tel que le triangle OAK soit direct, isocèle en O tel que $\widehat{AOK}$ = $\frac{5\pi}{6}$ rad.

8) Construire en justifiant le point A' tel que l'angle $\widehat{AOA'}$ soit plat. En donner une mesure.

9) Construire le point K' de (C) tel que $\widehat{AOK'}$ = $\frac{7\pi}{6}$ rad.

10) Construire le point H' de (C) tel que $\widehat{AOH'}$ = $\frac{5\pi}{4}$ rad.

11) Construire le point G' de (C) tel que $\widehat{AOG'}$ = $\frac{4\pi}{3}$ rad.

12) Construire le point D' de (C) tel que $\widehat{AOD'}$ = $\frac{3\pi}{2}$ rad.

13) Construire le point B' de (C) tel que $\widehat{AOB'}$ = $\frac{5\pi}{3}$ rad.

14) Construire le point E' de (C) tel que $\widehat{AOE'}$ = $\frac{7\pi}{4}$ rad.

15) Construire le point F' de (C) tel que $\widehat{AOF'}$ = $\frac{11\pi}{6}$ rad.

16) Donner une autre mesure des angles construits dans les questions 9) à 15).

17) Comment sont F et K ? F et F' ? F et K' ? Citer d'autres couples de points qui ont les mêmes propriétés.

EXERCICE 19

1. Construire es représentants de trois vecteurs unitaires $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{3\pi}{4}+k2\pi$ et $\left(\widehat{\vec{u},\vec{w}}\right)=\frac{2\pi}{3}+k'2\pi$
2. Déterminer une mesure de $\left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right)$

EXERCICE 20

Quelles sont les mesures $\left(\widehat{-\vec{u},\vec{v}}\right)$, $\left(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}\right)$ et $\left(\widehat{-\vec{u},-\vec{v}}\right)$ si l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ a pour mesures $\frac{\pi}{6}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$

EXERCICE 21

Sachant que $\cos a=-\frac{2}{3}$ avec $\pi<a<\frac{3\pi}{2}$, sans calculer a, déterminer $\sin a$, puis $\tan x$

EXERCICE 22

Calculer sans utiliser la calculatrice, la valeur exacte de $\cos x$ sachant que :

1. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ et $\sin x = -\frac{3}{5}$
2. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ et $\sin x = \frac{1}{3}$

EXERCICE 23

Calculer sans utiliser la calculatrice, la valeur exacte de $\sin x$ sachant que :

1. $0 < x < \pi$ et $\cos x = \frac{1}{4}$
2. $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ et $\cos x = -0,8$

EXERCICE 24

Sachant que $\sin a = \frac{3}{7}$ avec $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$, calculer $\cos a$

En déduire

1. $\sin(-a)$
2. $\cos(-a)$
3. $\sin(\pi - a)$
4. $\cos(\pi - a)$
5. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$
6. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$

EXERCICE 25

Donner la valeur exacte de $\cos a$ et $\sin a$ pour :

1. $a = \frac{5\pi}{6}$
2. $a = \frac{11\pi}{6}$
3. $a = -\frac{7\pi}{6}$

EXERCICE 26

Sachant que $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$ et $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$, utiliser les relations trigonométriques pour donner les valeurs exactes de :

1. $\sin \frac{4\pi}{5}$
2. $\cos \frac{4\pi}{5}$
3. $\sin \frac{3\pi}{10}$
4. $\cos \frac{3\pi}{10}$
5. $\sin \frac{6\pi}{5}$
6. $\cos \frac{6\pi}{5}$
7. $\sin \frac{7\pi}{10}$
8. $\cos \frac{7\pi}{10}$

EXERCICE 27

On donne $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Déterminer $\cos \frac{\pi}{8}$, puis $\sin \frac{5\pi}{8}$ et $\cos \frac{5\pi}{8}$

EXERCICE 28

Soit x un nombre réel, utiliser les relations trigonométriques pour exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ puis $\sin x$

1. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
2. $\cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right)$
3. $\sin\left(x - 15\pi\right)$

EXERCICE 29

Soit x un nombre réel, utiliser les relations trigonométriques pour exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ puis $\sin x$

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi + x) + \cos(\pi - x) + \sin(\pi + x)$
2. $3\sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
3. $2\sin(4\pi - x) - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
4. $\cos(5\pi + x) + \sin(5\pi - x) - \cos(7\pi - x) + \sin(7\pi + x)$
5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) - \sin(7\pi - x)$

EXERCICE 30

Calculer le nombre A dans chacun des cas

1) $A = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\pi$

2) $A = \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{6\pi}{3} + \sin\frac{8\pi}{3}$

3) $A = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\frac{2\pi}{3}$

4) $A = \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \sin\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{17\pi}{6}$

5) $A = \cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + \cos\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{23\pi}{4}$

6) $A = \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8} + \cos\frac{1}{}$

7) $A = \sin(-x) + \sin(\pi - x)$

8) $A=\cos(-x)+\cos(\pi+x)$

9) $A=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\cos(3\pi-x)$

10) $A=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\sin(x-3\pi)$

11) $A=\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$

EXERCICE 31

Calculer les nombres réels suivants :

1. $A=1+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{3\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{3}$
2. $B=\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{3}$

EXERCICE 32

Tracer les représentants d'origines O des vecteurs définis par leurs coordonnées dans la base orthonormale $(\vec{i},\vec{j})$

1. $\vec{u}_0(1;0)$
2. $\vec{u}_1\left(\cos\frac{\pi}{3};\sin\frac{\pi}{3}\right)$
3. $\vec{u}_2\left(\cos\frac{2\pi}{3};\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
4. $\vec{u}_3\left(\cos\frac{3\pi}{3};\sin\frac{3\pi}{3}\right)$
5. $\vec{u}_4\left(\cos\frac{4\pi}{3};\sin\frac{4\pi}{3}\right)$
6. $\vec{u}_5\left(\cos\frac{5\pi}{3};\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

Vérifier que $\vec{u}_0+\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3+\vec{u}_4+\vec{u}_5=\vec{o}$ et retrouver le résultat de la question précédente.

EXERCICE 33

Construire deux triangles ABC non superposables de hauteur [AH] tels que AB= 8cm ; AH=2 cm et HC=4 cm.

Calculer dans chaque cas, la longueur du segment [BC].

EXERCICE 34

Soit ABC un triangle et H le pied de sa hauteur issue de A. On a BC=5 cm ; BH=1 cm et AH=2 cm.

Le triangle ABC est-il rectangle ?

EXERCICE 35

Soit ABC un triangle. B' et C' sont les milieux des côtés [AC] et [AB]. H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). Démonter que la droite (B'C') est la médiatrice du segment [AH].

EXERCICE 36

Deux cercles C et C'de centres respectifs O et O' sont sécants en A et B. Soit E le point diamétralement opposé à A sur le cercle C et F le point diamétralement opposé à A sur le cercle C'.

1°) Démontrer que les points E, B et F sont alignés.

2°) Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (OO').

3°) On a AO=3 cm ; AO'=4 cm et (AO)⊥(AO').

  a) Calculer la longueur du segment [EF].

  b) Calculer l'aire du triangle AEF. En déduire la longueur du segment [AB].

EXERCICE 37

Soit ABCD un rectangle. Soit I le milieu du segment [CD], E le symétrique de B par rapport

au point I et F le symétrique de C par rapport au point D.

1°) Démontrer que A, D et E sont alignés.

2°) Démontrer que ACEF est un losange.

3°) Sachant que AB= 4 cm et AD=2 cm, calculer l'aire du triangle BEC. En déduire la distance du

point C à la droite (BC).

EXERCICE 38

Soit ABC un triangle et H son orthocentre.

1°) Déterminer les orthocentres des triangles ABH, BCH et CAH.

2°) Quelle remarque peut-on faire quand ABC est rectangle en A ?

EXERCICE 39

Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit M un point du segment [BC], H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB), K le projeté orthogonal de M sur la droite (AC) et B' le projeté orthogonal de B sur (AC).

Démontrer, en calculant les aires des triangles ABM et ACM, que MH+MK=BB'.

EXERCICE 40

Soit ABCD un trapèze tel que AB=4 cm, (AB)//(CD). E et F sont les projet´es orthogonaux

de A et de B sur la droite (CD) ; ABFE est un carré. AED est un triangle rectangle isocèle. BFC

est un triangle rectangle en F avec $\widehat{FCB} = 60°$.

1°) Calculer les longueurs des diagonales [AC] et [BD].

2°) Soit I le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD]. Calculer $\frac{IA}{IC}$ et $\frac{IB}{ID}$

3°) Calculer les longueurs IA, IC, IB et ID.

EXERCICE 41

Un triangle ABC rectangle en A est tel que BC=4,5 cm et AB=3,6 cm.

1°) Calculer la longueur AC.

2°) Soit H le projet´e orthogonal de A sur (BC).

En écrivant $\sin \widehat{B}$ de deux manières, calculer AH. En déduire BH et HC.

3°) Tracer la parallèle à (AB) passant par H. Elle coupe (AC) en E. Calculer HE, AE et EC.

4°) La bissectrice de l'angle $\widehat{BHA}$ coupe (AB) en D. Soient K et L les projet´es orthogonaux,

respectivement sur (AH) et (BH).

a) Montrer que DKLH est un carré. Soit a son côté.

b) En utilisant le théorème de Thalès, calculer a puis BD et AD.

EXERCICE 42

ABC est un triangle et O un point du plan tel que (OA) coupe (BC) en D. Par D, on trace la parallèle à (OC) qui coupe (AC) en F et la parallèle `a (OB) qui coupe (AB) en E.

Démontrer que (EF)//(BD).

EXERCICE 43

ABCD est un quadrilatère convexe dont les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O. Les
parallèles menées par O à (BC) et (CD) coupent respectivement (AB) en M et (AD) en N.
Démontrer que (MN)//(BD).

EXERCICE 44
Soit ABC un triangle. Construire à l'extérieur du triangle le carré BCDE. Les droites (AD) et (BC) se coupent en M. Les droites (AE) et (BC) se coupent en N. La droite passant par N
et perpendiculaire à (BC) coupe la droite (AB) en P. La droite passant par M et perpendiculaire à
(BC) coupe la droite (AC) en Q.
1°) Démontrer que (PQ)//(BC). Quelle est la nature de MNPQ ?
2°) Démontrer que PN=NM. Quelle est la nature de MNPQ ?

EXERCICE 45
Soit ABC un triangle. I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB]. D est le milieu du segment [KJ].
1°) Démontrer que les points A, D, I sont alignés et que D est le milieu de [AI].
2°) Soit J' le point du segment [AC] tel que $AJ'=\frac{1}{3}AC$.
K' est le point du segment [AB] tel que $AK'=\frac{1}{3}AB$. E est l'intersection des droites (AI) et (J'K').
Démontrer que le point E est le milieu du segment [J'K'].

EXERCICE 46
Soit ABC un triangle dont l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu. A_1 est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). B_1 est le projeté orthogonal de B sur (AC). C_1 est le projeté orthogonal de C sur (AB).
Le point A_1 se projette orthogonalement en M sur la droite (AB) et en N sur la droite (AC).
Démontrer que $(MN)//(B_1C_1)$.
EXERCICE 47

Tracer un triangle ABC non rectangle et mener de B la perpendiculaire `a (AB) et de C la
perpendiculaire à (AC). Ces deux droites se coupent en D.
Montrer que D appartient au cercle circonscrit au triangle ABC. (Indication : on considèrera le
cercle de diamètre [AD].)

EXERCICE 48

ABCD est un parallélogramme de centre O. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Les droites (DI) et (BL) se coupent en un point noté E. Les droites (BK) et (DJ) se coupent en un point noté F.

1°) Démontrer que les points A, E, O, F et C sont alignés.(Indication : on considèrera les médianes
des triangles ADB et DCB.)

2°) Démontrer que AE=EF=FC.

EXERCICE 49

Soient ABC et A'BC deux triangles rectangles de même hypoténuse [BC]. Soit I le point d'intersection des droites (AC) et (A'B). La perpendiculaire à (BC) passant par I coupe la
droite (AB) en J.
Montrer que les points C, A' et J sont alignés. (Indication : utiliser les hauteurs du triangle ICJ).

EXERCICE 50

Soit ABCD un carré. Soit E le point intérieur au carré tel que ABE soit un triangle équilatéral.
Soit F le point extérieur au carré tel que BCF soit un triangle équilatéral.

1°) Calculer les mesures des angles $\widehat{DEA}$, $\widehat{AEB}$ et $\widehat{BEF}$

2°) En déduire que les points D, E et F sont alignés.

EXERCICE 51

Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle C. H est le point de concours des hauteurs du triangle ABC. D est le point diamétralement opposé à B dans le cercle C.

1°) Déterminer 5 couples de droites perpendiculaires.

2°) En déduire que le quadrilatère AHCD est un parallélogramme.

EXERCICE 52

Sur un cercle C de centre O, on marque deux points A et B tels que (OA) soit perpendiculaire à (OB). Calculer l'angle $\widehat{AMB}$ lorsque M est un point du petit arc $\overset{\frown}{AB}$.

EXERCICE 53

Sur un cercle de centre O et de rayon 4 cm, marquer trois points A, B et C tels que $\widehat{BAC} = 60°$

Calculer la longueur du petit arc d'extrémités A et B.