NOMBRES REELS

EXERCICE 0

Calculer

1) $\frac{1}{7}-\frac{1}{15}+\frac{1}{81}$

2) $\frac{8}{3}+\frac{5}{18}-\frac{4}{9}$

3) $-\frac{6}{35}+\frac{4}{5}-\frac{3}{4}$

4) $\frac{1}{5}-\frac{1}{18}-\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{64}$

5) $\frac{5}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{12}$

6) $-\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\right)-\frac{10}{45}+\frac{17}{315}$

7) $\frac{1}{16}+\frac{1}{72}+\frac{3}{80}+\frac{10}{112}$

8) $\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}\right)$

9) $\frac{143}{22}-\frac{14}{84}+\frac{7}{63}-\frac{315}{150}$

10) $\dfrac{\frac{2}{7}+\frac{5}{21}}{\frac{5}{9}-\frac{1}{3}}$

11) $\dfrac{2+\frac{1}{5}}{7-\frac{3}{5}}$

12) $\dfrac{1-\frac{1}{15}}{1-\frac{1}{12}}+\dfrac{1+\frac{1}{12}}{1+\frac{1}{15}}$

13) $\dfrac{3-\frac{5}{7}+\frac{1}{2}}{3+\frac{5}{7}-\frac{1}{2}}+\dfrac{5+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{5-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}$

14) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$

15) $\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292}}}}$

EXERCICE 1

Calculer

$A=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}-3\right)$

$B=\frac{2}{a}-\frac{7}{a}\times\dfrac{1}{\frac{a}{4}-\frac{a}{2}}$

$C=\dfrac{\frac{3}{2}-1}{1,5+1}\times\frac{5^3}{18}$

$D=a^{-2}+\dfrac{\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{a}\right)^2}{\frac{5}{4}}$

$E=\dfrac{\frac{7}{6}-\frac{a}{3}}{1-\frac{4a}{14}}\times\frac{a^2}{7}$

$F=\frac{2+3}{2+7}\div\left(\frac{5}{3}\right)^2+1$

$G=\frac{7}{18}\times\frac{2}{7}-\left(\frac{5}{3}-1\right)^2+1$

$H=\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)^2\div\frac{5}{8}-\frac{8}{3}$

$I=\frac{a}{3}-\frac{a}{3}\times\frac{7}{21}-\frac{7}{21}$

$J=\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}\div\dfrac{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}+\frac{3}{4}}$

$K=\dfrac{a+\frac{a}{3}-\frac{a}{2}}{2a+\frac{3a}{4}+\frac{a}{3}}$

$L=\dfrac{-5+3^2\times2+4}{12\times2+10}$

$M=\dfrac{2}{a+1}+\dfrac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}$

$\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{7}{6}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{5}{2}}$

EXERCICE 2

Calculer

a) $\dfrac{\frac{9}{2}-2}{\frac{8}{7}+8}$

b) $\dfrac{1+\frac{2}{5}}{3-\frac{7}{5}}$

c) $40-(-20)\times\dfrac{-5}{56}$

d) $\dfrac{-1}{7}\div\left(\dfrac{13}{9}-\dfrac{3}{2}\right)$

e) $\dfrac{\frac{-3}{5}+3}{\frac{-5}{4}-6}$

f) $-4-\dfrac{9}{16}\div\dfrac{9}{14}$

g) $\dfrac{-3}{5}\times\left(\dfrac{-9}{7}+\dfrac{-13}{2}\right)$

h) $-4-\dfrac{-4}{9}\times\dfrac{-81}{16}$

i) $\dfrac{\frac{-8}{9}-7}{\frac{-2}{5}+9}$

j) $\dfrac{7}{8}\times\left(\dfrac{10}{3}-\dfrac{-9}{8}\right)$

k) $\dfrac{8}{7}\times\left(\dfrac{-9}{7}+\dfrac{-10}{13}\right)$

l) $\dfrac{-3}{5}+\dfrac{1}{10}\times\dfrac{5}{12}$

m) $\dfrac{\frac{10}{9}+1}{\frac{-7}{5}+4}$

n) $\dfrac{\frac{-2}{5}+8}{\frac{-1}{4}+6}$

o) $\dfrac{-1}{4}\times\left(\dfrac{11}{4}+\dfrac{12}{5}\right)$

p) $2+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-12}{5}$

q) $-6+\dfrac{3}{2}\div\dfrac{-15}{4}$

r) $\dfrac{\frac{-5}{8}-6}{\frac{9}{7}-5}$

s) $\dfrac{3}{4}\div\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{7}{11}\right)$

t) $\dfrac{-1}{3}\div\left(\dfrac{-3}{4}-\dfrac{9}{5}\right)$

u) $\dfrac{3}{13}-\dfrac{-1}{39}\div\dfrac{10}{13}$

v) $\dfrac{\frac{4}{9}-4}{\frac{4}{3}-4}$

w) $\dfrac{3\times10^{7}}{21\times10^{-8}}+\dfrac{10^{15}}{7}-\dfrac{10^{10}}{35^{-6}}$

x) $\dfrac{1,3\times10^{-4}\times8\times10^{5}\times9\times10^{3}\times6,5}{0,065\times2600\times10^{-3}\times0,036}$

y) $\dfrac{10^{-1}+2\times10^{-2}+3\times(-3)}{11\times10^{-2}+11\times10^{-3}+0,002}$

z) $\dfrac{3^{7}\times\left(2^{-3}\right)^{5}\times6^{4}}{\left(3^{2}\right)^{5}\times\left(2^{-5}\right)^{2}}$

aa) $\dfrac{10^{4}\times15^{2}}{\left(2^{3}\right)^{2}\times12^{3}}$

bb) $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}}\times\sqrt{\dfrac{98}{25}}$

cc)

EXERCICE 3

Calculer

$$A=\frac{49\times(-2)^{5}\times(-3)^{-2}}{-7^{3}\times16\times3^{-3}}$$

$$B=\frac{(-5)^{4}\times7^{2}\times(-2)^{-3}}{(-4)^{4}\times(-1)^{5}\times25}$$

$$C=\left(\frac{\left(a^{2}\times b^{4}\right)^{2}}{a^{3}}\right)^{-3}$$

$$D=0,0000000005\times1004000000$$

$$E=\frac{2^{3}}{3^{4}}\div\frac{2^{2}}{3^{5}}$$

$$F=\frac{\left(a^{2}b\right)^{3}}{(-a)(-b)^{2}}$$

$$G=\left(\frac{4^{-2}\times8^{4}}{90^{7}\times30^{-2}}\right)^{3}$$

$$H=\left(\frac{5^{5}\times24^{-3}}{\left(100^{-7}\times15^{6}\right)^{4}}\right)^{2}$$

$$I=\frac{2^{2}\times10^{-10}\times2^{7}\times10^{-6}}{32\times10^{-15}}$$

$$J=\left(\frac{a^{3}\times b^{-2}}{a^{4}b^{-3}}\right)^{-2}\times\frac{\left(3a^{2}\times b^{3}\right)^{3}}{\left(2^{-1}\times ab\right)^{2}}$$

$$K=\frac{5^{3}\times3^{8}\times5^{2}}{125\times5^{2}\times81\times7^{0}}$$

$$L=\frac{0,9\times7\times10^{-1}\times250}{14\times10^{3}\times0,5\times10^{-2}}$$

$$M=\frac{\left(56^{8}\times81^{-2}\times25^{7}\right)^{3}}{\left(50^{5}\times700^{3}\right)^{4}}$$

$$N=\frac{0,04\times 2^{-2}\times\left(10^{-2}\right)^{3}\times 10^{2}}{3\times 10^{-8}\times 10^{-2}}$$

$$P=\frac{9^{n+1}+9^{n}}{3^{2n+1}-3^{2n}}$$

$$R=\frac{\left(ab^{-2}c^{3}\right)^{4}\left(a^{4}b^{5}c^{-6}\right)^{-2}}{\left(a^{-7}b^{8}c^{7}\right)^{3}\left(a^{6}b^{5}c^{4}\right)^{2}}$$

$$O=\frac{25\times\left(10^{2}\right)^{-5}\times 121}{11\times 75\times 10^{-9}}$$

$$Q=\frac{\left(ab^{2}\right)^{2}\left(ab^{-1}\right)^{3}\left(a^{2}b\right)^{-2}}{a^{2}c^{-5}\left(a^{-1}bc^{2}\right)^{3}}$$

EXERCICE 4

Calculer

$$A=\sqrt{2}+3\sqrt{8}-6\sqrt{50}$$

$$B=2+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$C=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$$

$$D=\frac{2\sqrt{21}\sqrt{75a^{2}}}{\sqrt{35}\sqrt{20}}$$

$$E=\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^{2}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{2}$$

$$F=\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)^{3}$$

$$G=\left(2a+\sqrt{b}\right)^{2}+\left(1-2a\sqrt{b}\right)^{2}-\left(2a\sqrt{b}\right)^{2}$$

$$H=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}}}$$

$$I=\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{20}}{\sqrt{45}\left(2-\dfrac{5}{6}+\dfrac{4}{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}$$

$$J=\left(4+3\sqrt{2}\right)^{2}-\left(2+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$K=\sqrt{\frac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}}$$

$$L=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$M=\frac{\sqrt{0,04}}{\sqrt{0,0016}}+\frac{\sqrt{0,01}}{\sqrt{0,04}}$$

$$N=\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^{2}$$

$$O=\sqrt{\frac{a^{6}+a^{6}+a^{6}+a^{6}}{5^{2}+5^{2}+5^{2}+5^{2}}}$$

$$P=\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{\frac{4\sqrt{27}}{3\sqrt{3}}}}}}}$$

$$Q=\sqrt{\frac{48a^{6}b^{12}}{243\left(ab\right)^{4}}}$$

$$R=\sqrt{\frac{4^{80}+5\times 8^{53}}{28\times 2^{155}}}$$

$$S=\left(\sqrt{1+\sqrt{1-a^{2}}}+\sqrt{1-\sqrt{1-a^{2}}}\right),\ \left(a\in[0;1]\right)$$

$$T=\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$$

EXERCICE 5 Vrai ou Faux ? Justifier la réponse.

1. Un nombre décimal ne peut pas être un entier.
2. Un nombre décimal est un rationnel.
3. Un nombre décimal est un réel.
4. Un nombre irrationnel peut être un entier.
5. Un nombre entier relatif est un décimal.
6. L'opposé d'un entier naturel est un entier naturel.
7. L'inverse d'un entier autre que 0 est un décimal.
8. a b − et b a − sont deux nombres inverses.
9. l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel.

EXERCICE 6

Comparer

1) $\sqrt{2}$ et $\dfrac{941664}{665857}$

2) $a=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$ et $b=9-4\sqrt{5}$

EXERCICE 7

1. Montrer que 0,2006200620062006… est un nombre rationnel
2. Écrire M =8,51515151515 ... sous la forme d'une fraction irréductible.

EXERCICE 8

Effectuer les opérations suivantes sans avoir recours à une calculatrice et donner la réponse sous forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier.

1) $5^3\times5^2$
2) 7×7^2
3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$
4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\div\left(\dfrac{2}{3}\right)^6$
5) $(-1)^5\times(-1)^7$
6) $10^4\times10^{-1}$
7) $3^7\times3^{-5}$
8) $\left(2^2\right)^3$
9) $\left((-1)^{11}\right)^{11}$
10) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)\times\left(-\dfrac{3}{3}\right)^5$
11) $\dfrac{2^{13}}{2^{10}}$
12) $(-2,5)^2\div(-2,5)$
13) $\dfrac{5^7}{5^7}$
14) $4^5\times4^{-5}$
15) $\left(6^7\right)^0$
16) -5^3
17) $(-5)^3$
18) $(-0,01)^2$
19) $-(-10)^3$
20) 7^0
21) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$
22) $\left(-\dfrac{5}{2}\right)^4$
23) $\left(-\dfrac{7}{3}\right)^2$
24) $\left(10^2\right)^3$
25) $10^{-2}\times10^{-2}$
26) $\left(10^6\right)^0$
27) $10^2+10^4\times10^{-5}$
28) $0,01\times0,001\times10^6$
29) $\dfrac{10^9}{10^7}$
30) $\dfrac{1}{(0,01)^3}$
31) -4^{-3}
32) $(-2)^{-3}$
33) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$
34) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4$
35) $\dfrac{5^6\times2^6}{100000}$
36) $\dfrac{(-1)^2-(-1)^3-(-1)^4}{(-2)^2-(-2)^3-2^4}$
37) -0^7
38) $(-1)^{157845}$
39) $(-1)^{157846}$
40) $3^2\times\left(3^2+3^4\right)$
41) $\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^5}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}$
42) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^4\div\left[\left(\dfrac{4}{5}\right)^2\right]^4$

EXERCICE 9

Combien faudrait-il de chiffres pour écrire $\left(\left((10)^{10}\right)^{10}\right)^{10}$ sous forme décimale ?

EXERCICE 10

Simplifier un maximum les expressions suivantes.

1) $\sqrt{2}+3\sqrt{8}-6\sqrt{50}$
2) $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{8}}$
3) $\dfrac{2\times\sqrt{21}\times\sqrt{75}}{\sqrt{35}\times\sqrt{20}}$
4) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)^2$
5) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}}}$
6) $\sqrt{\dfrac{2^6+2^6+2^6+2^6}{5^2+5^2+5^2+5^2}}$

EXERCICE 11

Démontrer les égalités ci – dessous

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $6x^2+3x-9=3(x-1)(2x+3)$
2) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2x^2-18x+15=2(x-2)^2+7$
3) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x+3)(x-3)=(x+1)^2-16$
4) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x+1)^2-9+(x-2)^2+3=2\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right)$
5) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x-2)(x+3)(x-1)=x^3-7x+6$
6) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2\sqrt{x^2+3x+\frac{9}{4}}=2x+3$
7) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$ et $x\neq -1$, on a $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{9}{x-1}=\dfrac{-8x+10}{x^2-1}$
8) $1+3+3^2+3^3=\dfrac{3^4-1}{2}$
9) $1+2+2^2+2^3+2^4=2^5-1$
10) Pour tout $a\in\mathbb{R}$ et pour tout $b\in\mathbb{R}$, on a $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}$
11) Pour tout $q\in\mathbb{R}$, $q\neq 1$ $1+q+q^2=\dfrac{q^3-1}{q-1}$

EXERCICE 12

Simplification avec l'aide de valeurs absolues

Pour a > 1, simplifier $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$

EXERCICE 13

Soit n un entier, montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

EXERCICE 14

Soit x un irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel.

EXERCICE 15

Le nombre d'or est le nombre : $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Vérifier les égalités suivantes :

a) $\Phi^2 = \Phi + 1$

b) $\Phi = \frac{1}{\Phi} + 1$

c) $\Phi^3 = 2\Phi + 1$

EXERCICE 16

Montrer que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{-2+\sqrt{5}} = 1$

EXERCICE 17

Factoriser

$A = x^2 - 9 - (2x-6)x + (x-3)^2$

$B = (x-11)^2 + (33-3x)(x+2)$

$C = (x^4-1)(x^2+2x+1)$

$D = -0,3(2x-3)^2 + 0,7x(1,5-x)$

$E = 0,25x^2 - x + 1$

$F = x^2 - 3x + 2$

$G = -9x^2 - 6x - 1$

$H = -10 + (x+5)^2 - 2x$

$I = -2x^2 + x + 1$

$J = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$

$K = x^2 - 2$

$L = 4x^2 - 12x + 8$

$M = x - (3x-1)^3 + 2x - 1$

$N = (2x-1)x + (1-2x)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$O = x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 2(x+1)^2$

$P = x^2 - (x+1)^2$

$Q = 5(1-x)^2 - 45x^2$

$R = (x+1)^2 + 2(x+1) + 1$

$S = x^5 + 4x^4 + 4x^3$

$T = (5x-1)(x+3) + 3(25x^2-1)$

$U = 49 - 28x + 4x^2 + (7-2x)(5-3x)$

$V = x^2(x-4) + 2x(x-4) + x - 4$

$W = x^2 + 6x + 5$

$X = 3x^2 + 7x + 2$

$Y = -2x^2 - x + 1$

$Z = 2x^2 - 3x + 1$

EXERCICE 18

1. Montrer que pour : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$
2. En déduire $E\left(\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

EXERCICE 19

Montrer que $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ est un entier

EXERCICE 20

Montrer que $\sqrt[3]{2000+1998+\sqrt{19980005}} + \sqrt[3]{2000+1998-\sqrt{19980005}} = \sqrt[3]{1999}$

EXERCICE 21

Démontrer que $\sqrt[3]{5}+\sqrt{2}$ est irrationnel

EXERCICE 22

1/ Démontrer que les nombres suivants sont des nombres rationnels en les mettant sous la forme $\frac{a}{b}$ où a st un nombre entier et b, un entier relatif non nul

a/ 1,5 b/ - 0,38 c/ $\frac{1,2}{0,4}$ d/ 3 x 0,01 e/ 12,305 f/ $\frac{0,7}{0,003}$

g/ $-\frac{7}{5}$ h/ $\frac{5}{40 \times 10^{-2}}$ i/ 15000 j/ $\frac{0,125}{62,5}$ k/ $\frac{0,03}{21} \times 10^2$ l/ $\frac{3}{0,04} \times 10^{-2}$

2/ Parmi ces nombres lesquels sont des nombres décimaux ? Justifier la réponse en les mettant sous la forme

$\frac{a}{10^p}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$

EXERCICE 23

1/ Donner la notation scientifique des nombres suivants ainsi que l'ordre de grandeur de ces nombres.

a/ 251,3 b/ 0,095 c/ $27,31 \times 10^{3}$ d/ 150×10^{-3}

2/Donner l'ordre de grandeur du résultat des calculs suivants, puis effectuer les calculs et donner le résultat en notation scientifique, comparer à l'ordre de grandeur trouvé précédemment.

a/ 851,7 x 0,0018 x 0,073 b/ $0,05 \times 1200 \times 10^{-3}$ c/ 5698,3 x 2314,89 d/ $\frac{181,47}{78,956}$

EXERCICE 24

Donner l'écriture fractionnaire irréductible des nombres rationnels suivants :

a) 3,456 b) 33,67 c) 0,0006 d) 458,5

EXERCICE 25

Déterminer si les nombres suivants sont premiers. S'ils ne sont pas premiers, donner leur décomposition en produit de facteurs premiers.

27 35 56 31 17 147 264 81 105 621 819000

EXERCICE 26

Démontrer que 1 184 et 1 210 sont deux nombres amiables

EXERCICE 27

1) Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers : 56, 60 et 24.

2) En déduire le plus petit multiple commun (souvent noté PPCM) à 56, 60 et 24.

3) En déduire la simplification de : $B=\frac{5}{56}-\frac{7}{60}+\frac{11}{24}$

EXERCICE 28

1/ Simplifier les fractions suivantes en décomposant le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers. Préciser les nombres décimaux.

$\frac{48}{75}$ $\frac{68}{102}$ $\frac{225}{30}$ $\frac{1755}{2295}$ $\frac{198}{726}$ $\frac{585}{1275}$

2/ Simplifier les racines carrées suivantes en les décomposant en produit de facteurs premiers.

$\sqrt{54}$ $\sqrt{189}$ $\sqrt{845}$ $\sqrt{246}$ $\sqrt{363}$ $\sqrt{1044}$

3/ Calculer, en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers, les PGCD suivants.

PGCD (48 ; 72) PGCD (125 ; 175) PGCD (74 ; 185)

EXERCICE 29

1. Calculer la somme de 5 entiers consécutifs. Que remarque-ton ? (*Faire plusieurs essais)*

2. Montrer que la somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5

EXERCICE 30

Dans chacun des cas suivants, déterminer le(s) chiffre(s) a, b, c sachant que :

1/ 23a4 est divisible par 3.

2/ 23a4 est divisible par 3 mais pas par 9.

3/ 23b5c est divisible par 3 et par 5.

EXERCICE 31

Soit le nombre A = $2^3 \times 5^2 \times 7$.

1/ Vérifier que A possède 24 diviseurs.

2/ Trouver le plus petit entier naturel k tel que kA soit le carré d'un entier.

3/ Trouver le plus petit entier naturel m tel que mA soit le cube d'un entier.

EXERCICE 32

1. Calculer le produit de quatre entiers consécutifs et ajouter 1.

Que remarque-t-on ? (*Faire plusieurs essais)*

2. Montrer que, pour tout réel x, on a $a(a+1)(a+2)(a+3)+1=(a^2+3a+1)^2$

Expliquer le résultat observé à la question **1.**

EXERCICE 33

1. Un nombre pair s'écrit sous la forme ……………………………

Un nombre impair s'écrit sous la forme ……………………………

2. Montrer que le carré d'un nombre pair est un nombre pair

3. Montrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair

4. a) Calculer la somme de trois entiers impairs consécutifs.

Le résultat est-il un nombre premier ? *(Faire plusieurs essais)*

b) Démontrer ce que vous avez observé à la question a)

5. a) Développer et réduire l'expression $(n+1)^2-n^2$

b) En déduire que tout nombre impair s'écrit comme la différence des carrés de deux entiers consécutifs.

c) Appliquer ce résultat aux entiers 13, 45 et 101.

EXERCICE 34

1. Déterminer le PGCD de 2520 et 2646.
2. Calculer, puis simplifier les fractions suivantes :
   a. $\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{5}$ b. $\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+1$
3. Ecrire les résultats suivants sous forme de multiplication de puissances de 2, 3 et 5 :
   a. $\frac{2^2\times3^{-4}\times5}{2\times3^2\times5^{-3}}$ b. $\frac{6^3\times25}{40^2}$

EXERCICE 35

Ecrire plus simplement :

$A=(-2x)^2$ $B=(-2x)^3$ $C=3x^2y^3-y(xy)^2$ $D=x^{-1}\times5x^3$

EXERCICE 36

Ecrire les nombres suivants sous la forme $2^p\times3^q\times5^r$

150   36 $\frac{150}{36}$ $(150)^2\times36$ $\frac{(150)^3}{36}$ $\frac{2}{150^2}\times\left(\frac{6}{5}\right)^2$

EXERCICE 37

Décomposer 1400 en produit de facteurs premiers.

1. Ecrire tous les diviseurs de 1400.
2. Compléter par un nombre entier :
   a) 1400×………est le carré d'un nombre entier.
   b) 1400×………est le cube d'un nombre entier.

EXERCICE 38

a, b et c sont des nombres non nuls. Ecrire les nombres suivants sous la forme $a^p\times b^q\times c^r$

$A=\frac{c}{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$ $B=a^5(bc)^2\times\frac{1}{(a^3b)^2}$ $C=\frac{ab^2}{ca^{-2}}$ $D=(a^3b^{-5})^2$

EXERCICE 39

Démontrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

EXERCICE 40

Soient x et y deux nombres rationnels strictement positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels.

Démontrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est un nombre irrationnel.

EXERCICE 41

Soient a et b deux réels quelconques. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si a + b est rationnel, alors soit a est rationnel soit b est rationnel.
2. Si a + b est irrationnel, alors soit a est irrationnel soit b est irrationnel.
3. Si a est rationnel, alors sa partie décimale est rationnelle.
4. Si a est irrationnel, alors la partie décimale de a + b est irrationnelle.
5. Si la partie décimale de a est rationnelle, alors a est rationnel.

EXERCICE 42

Soient x et a deux nombres réels tels que $a \neq 0$ et $|x-a|<|a|$. Démontrer que

$a-|a|<x<a+|a|$ et en déduire que x est du signe de a

EXERCICE 43

Soient x et y deux rationnels distincts tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels.

1. On considère les deux réels $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ et $\sqrt{x}-\sqrt{y}$. Montrer que leur produit est rationnel, leur somme irrationnelle. En déduire qu'ils sont irrationnels.
2. Soient r et s deux rationnels. Montrer que $r\sqrt{x}+s\sqrt{y}$ est irrationnel.
3. Montrer par des exemples que $\sqrt{x}\sqrt{y}$ peut être rationnel ou irrationnel.
4. Montrer que les réels suivants sont irrationnels.

$1+\sqrt{2}$ $\qquad$ $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ $\qquad$ $\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}$

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}$ $\qquad$ $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2$

EXERCICE 44

Soient x et y des réels, montrer que :

1) $|x|+|y|\leq|x+y|+|x-y|$
2) $1+|xy-1|\leq\left(1+|x-1|\right)\left(1+|y-1|\right)$

EXERCICE 45

Soit $x\in\mathbb{R}$, calculer $E(x)+E(-x)$.

EXERCICE 46

Soit $x\in\mathbb{R}$, comparer $E(x)$ et $E(-x)$.

EXERCICE 47

1. Soit $x\in\mathbb{R}$ alors $E(x+1)=E(x)+1$.
2. $(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\leq y \Rightarrow E(x)\leq E(y)$

EXERCICE 48

Calculer, pour $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$, $E\left(\dfrac{n+m}{2}\right)+E\left(\dfrac{n-m+1}{2}\right)$

EXERCICE 49

Montrer que pour x réel et n ≥ 1, on a $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$

EXERCICE 50

Soit la fonction f définie par $f(x)=E(2x)-2E(x)$

Calculer $f(x)$ pour $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right[$ puis pour $x\in\left[\frac{1}{2},1\right[$. En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}, 0\leq E(2x)-2E(x)\leq 1$.

EXERCICE 51

Résoudre l'équation $E\left(\sqrt{x}\right)=E\left(\frac{x}{2}\right)$

EXERCICE 52

Soient x et y deux réels quelconques.

1. Montrer, en utilisant l'inégalité triangulaire, que $2|x|\leq|x+y|+|x-y|$.
2. En déduire que $|x|+|y|\leq|x+y|+|x-y|$.

EXERCICE 53 : Questions de cours :

Soit A une partie non vide et majorée de R. Soit a un réel.

1. Quand dit-on que a est un majorant de A ?
2. Quand dit-on que a est le plus grand élément de A ?
3. Quand dit-on que a est la borne supérieure de A ?
4. Quand dit-on que A est un intervalle ?
5. Démontrer que si A est un intervalle majoré, non minoré, et si a est la borne supérieure de A, alors A =] − ∞, a [ou bien A =] − ∞, a].

EXERCICE 54

Montrer, en utilisant la caractérisation de la partie entière, que pour tout $0\leq E(2x)-2E(x)\leq 1$

EXERCICE 55

Soient A et B deux parties non vides et bornées de R telles que A ⊂ B, montrer que sup A ≤ sup B et inf B ≤ inf A.

EXERCICE 56

Soit $x\geq 0$ un nombre réel tel que $x\neq\sqrt{3}$. Posons $y=\frac{x+3}{x+1}$. Calculer $\frac{y-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$ et en déduire que $y-\sqrt{3}<x-\sqrt{3}$

EXERCICE 57

Compléter le tableau suivant :

nombre	valeur approchée à 10^{-3} près	valeur approchée à 10^{-2} près par défaut	notation scientifique à 5 chiffres significatifs
$1132,77\times 10^{-3}$			
$69,32944$			
$-20,329622$			

EXERCICE 58 - QCM VRAI - FAUX

Soient x et y deux réels quelconques.

1) Si $x < y$ alors $x^2 < y^2$.
2) Si $0 < x < y$ alors $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.
3) Si $x < y$ alors $1 - x > 1 - y$.
4) Si $x < y$ alors $x^2 < xy$.
5) Si $0 < x < y$ alors $xy^2 < x^2 y$.

EXERCICE 59 - QCM VRAI - FAUX

On considère l'ensemble A suivant : $A = \left\{ (-2)^n, n \in \mathbb{N} \right\}$.

1) L'ensemble A est majoré.
2) L'ensemble A possède une borne inférieure finie.
3) L'ensemble A possède un plus petit élément.
4) sup(A) = +∞.

EXERCICE 60 - QCM VRAI - FAUX

On considère l'ensemble A suivant. $A = \left\{ 1 + (-1)^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N} \right\}$.

1) L'ensemble A est majoré.
2) L'ensemble A possède un plus grand élément.
3) sup(A) = 2.
4) 1 est un minorant de A.

EXERCICE 61

Soient A et B deux intervalles de R.

1. Montrer que A ∩ B est un intervalle.
2. Montrer que si A ∩ B est non vide, alors A ∪ B est un intervalle.
3. Montrer par un exemple que A ∪ B peut être un intervalle même si A ∩ B est vide.

EXERCICE 62

Pour chacun des ensembles de réels suivants :

a) $\left\{ (-1)^n, n \in \mathbb{N} \right\}$

b) $\left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

c) $\left\{ (-1)^n n, n \in \mathbb{N} \right\}$

d) $\left\{ \frac{n+1}{n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}$

e) $\left\{ \frac{2n+1}{n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}$

f) $\left\{ \frac{2n+(-1)^n}{n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}$

g) $\left\{ \frac{m+n}{m+2n}, m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

h) $\left\{ \frac{2m+n}{m+2n}, m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

i) $\left\{ \frac{2m-n}{m+2n}, m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

1. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
2. L'ensemble admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
3. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble.

EXERCICE 63

Simplifier les expressions suivantes en montrant les étapes de simplification :

$A=\dfrac{10^9\times 6^3}{25^4\times 3\times 2^{11}}$ $B=\dfrac{1}{10^{118}}-\dfrac{1}{10^{119}}$ $C=5^{108}\times 11\times\dfrac{1}{10^{107}}$

EXERCICE 64

Compléter le tableau suivant

Nombre	Valeur arrondie à 3 chiffres significatifs	Valeur approchée par excès à 10^{-3} près	Valeur approchée par défaut à 10^{-1} près	Valeur arrondie à 2 chiffres significatifs	Valeur arrondie à 10^{-3} près
$\dfrac{3\pi}{2}$					
$\dfrac{25\sqrt{5}+4}{2\sqrt{2}}$					
$1205\sqrt{3}\times 4\cdot 10^{-4}$					
$0{,}1205\times 7{,}15\times 10^{-2}$					
$2\sqrt{21}\times 69\times 10^{-3}$					

EXERCICE 65

Compléter le tableau suivant

Nombre	$39\times 10^5\times 45{,}89\times 10^2$	123 456 000	0,00024682	$5\,002\,500\times 10^{-4}$	$5\sqrt{3}\times 10^{-8}$
Valeur arrondie à 2 chiffres significatifs					
Valeur arrondie à 4 chiffres significatifs					

EXERCICE 66

1) Le nombre 403 est-il premier ? Justifier.

2) Le nombre 307 est-il premier ? Justifier.

3) Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers :

A = 252 $\qquad$ B = $28 \times 55 \times 44$

EXERCICE 67

1) Donner à laide de la calculatrice une valeur approchée de $A = \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2$ puis Développer A .

2) Simplifier $\dfrac{8\sqrt{2}+56}{16}$

3) Ecrire sous forme de fraction irréductible : $A = \dfrac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{5}$

EXERCICE 68

Simplifier les expressions suivantes, en montrant les étapes de simplification :

A= $\dfrac{10^9 \times 6^3}{25^4 \times 3 \times 2^{11}}$ $\qquad$ B= $\dfrac{1}{10^{118}} - \dfrac{1}{10^{119}}$ $\qquad$ C = $5^{108} \times 2^{106} \times 11 \times \dfrac{1}{10^{107}}$

EXERCICE 69

1) Montrer que pour tout nombre a et b de IR on a l'égalité suivante :

$(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

2) Utiliser cette égalité pour factoriser $(x^3 - 8)$

EXERCICE 70

Ecrire A = $\sqrt{98} + \sqrt{2}$ sous la forme a $\sqrt{b}$ où b est le plus petit possible.

Ce nombre est - il un élément de $\mathbb{Q}$?

EXERCICE 71

1/ Après avoir simplifier au maximum les nombres suivants, donner le plus petit ensemble auquel ils appartiennent.

Donner aussi leur nature.

a) $\dfrac{0,21}{1,05}$ $\qquad$ b) $\dfrac{7\pi + 14}{3\pi + 6}$ $\qquad$ c) $\dfrac{18}{5\sqrt{81}}$ $\qquad$ d) $\dfrac{16}{6} - \dfrac{11}{3}$ $\qquad$ e) $\dfrac{-8\pi}{-2}$ $\qquad$ f) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+1} - 2\sqrt{2}$

2/ a) Donner un rationnel non décimal.

b) Donner un réel non rationnel.

c) Donner un décimal non entier.

d) Donner un entier non naturel.

EXERCICE 72

On donne

$3,01 \leq x \leq 3,02$

$7,48 \leq y \leq 7,49$

$-3,25 \leq z \leq -3,24$

$-1,12 \leq t \leq -1,11$

Donner un encadrement à 10^{-2} près de $x + y$; $x - y$; $2x - 3y + 5z$; xy ; yz ; zt ; $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$; $\frac{y}{z}$; x^2 ; y^2

EXERCICE 73

Parmi les nombres suivants, indiquer ceux qui sont écrits en notation scientifique. Ecrire les autres sous forme scientifique.

a) 12×10^{-3}
b) $6,4 \times 10^{5}$
c) $5,03 \times 10^{-4}$
d) $0,124 \times 10^{2}$
e) $1,5 \times 10^{2}$
f) $0,1053 \times 10^{-3}$
g) 1563×10^{5}

EXERCICE 74

1/ Après avoir simplifier au maximum les nombres suivants, donner le plus petit ensemble auquel ils appartiennent.

Donner aussi leur nature.

a) $\frac{24,6}{10,8}$ b) $\frac{\sqrt{56}}{2\sqrt{40}}$ c) $\frac{15}{25} - \frac{2}{15}$ d) $\frac{21 - 7\pi}{33 - 11\pi}$ e) $\frac{-21}{3\sqrt{49}}$

2/ a) Donner un rationnel non décimal.

b) Donner un réel non rationnel.

c) Donner un décimal non entier et non rationnel.

d) Donner un entier non naturel.

e) Donner un irrationnel compris entre $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{3}$.

f) Donner un entier relatif mais non naturel supérieur à l'inverse de : $1 - \sqrt{3}$.

EXERCICE 75

1. Apres avoir simplifier au maximum les nombres suivants, donner le plus petit ensemble auquel ils appartiennent. Donner aussi leur nature.

a) $\frac{0,21}{1,05}$
b) $\frac{7^{14}}{3^{6}}$
c) $\frac{18}{5\sqrt{81}}$
d) $\frac{16}{6} - \frac{11}{3}$
e) $\frac{-8}{-2}$
f) $\frac{2}{\sqrt{2}+1} - 2\sqrt{2}$

EXERCICE 76

Quelle est la nature du nombre réel suivant : $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$?

EXERCICE 77

Compléter :

a) $[-1 ; 5[\cap]2 ; +\infty[=$
b) $[-3 ; 0] \cup [0{,}5 ; 4[=$
c) $[-1 ; 5[\cup]2 ; +\infty[=$
d) $]-\infty ; 7[\cap]5 ; 15[=$
e) $[-3 ; 0] \cap [0{,}5 ; 4[=$
f) $]-\infty ; 7[\cup]5 ; 15[=$

EXERCICE 78

Compléter le tableau suivant en vous aidant de votre calculatrice

a	a^2	a^3	$\frac{1}{a}$	Classer les valeurs trouvées dans l'ordre croissant
1				
2				
10				
0,3				
4				
0.8				
2,9				
0,99				
0,**01**				

1. Dans quelle situation peut-on dire que $a>a^2>a^3$?……………………………………………………………………
2. Dans quelle situation peut-on dire que $a<a^2<a^3$?……………………………………………………………………
3. Dans quelle situation peut-on dire que $a>\frac{1}{a}$?……………………………………………………………………
4. Dans quelle situation peut-on dire que $a<\frac{1}{a}$?…………………………………………………………………….

EXERCICE 79

Comparer les nombres suivants :

a) $\sqrt{5}-2$ et $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{5}-3$ et $\sqrt{15-6\sqrt{5}}$

c) $2\sqrt{5}-5$ et $\sqrt{45-20\sqrt{5}}$

En déduire une écriture simple de $\sqrt{45-20\sqrt{5}}$.

EXERCICE 80

A est un nombre strictement négatif. Comparer dans chaque cas *a* et *b*.

1. $a = \dfrac{5A}{12}$ et $b = \dfrac{3A}{8}$ 2. $a = \dfrac{5}{12} - A$ et $b = \dfrac{3}{8} - A$

3. $a = \dfrac{2}{3A}$ et $b = \dfrac{5}{6A}$

EXERCICE 81

Dans chaque cas, *a* et *b* sont deux réels strictement positifs. Comparer A et B en étudiant le signe de A – B.

1. $A = ab + 1$ et $B = (a+1)(b+1)$
2. $A = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ et $B = 2$.

EXERCICE 82

x désigne un nombre réel tel que $x \geq 2$.

$A = (x-1)^2$ et $B = (x-2)^2$.

a) Factoriser la différence A – B.

b) En déduire le signe de A – B et comparer alors A et B.

EXERCICE 83

Soient *a* et *b* deux réels strictement positifs. Démontrer que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

EXERCICE 84

Ranger dans l'ordre croissant a, a^2 et a^3 pour $a = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ et pour $a = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+1}}$.

EXERCICE 85

x désigne un nombre réel tel que $0 < x < 1$. Comparer les nombres $(1-x)$ et $(1-x)^3$.

EXERCICE 86

Soit *x* un réel vérifiant $x > 2$.

Préciser dans quels intervalles se trouvent : $\dfrac{1}{x}$; x^2 ; $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$; $\dfrac{1}{x-2}$.

EXERCICE 87

Calculer la valeur absolue des nombres suivants :

$A = 10^{-4} - 10^{-3}$ $\quad$ $B = 9 \times 10^{-3} - 10^{-2}$

$C = \pi - 4$ $\quad$ $D = 13 - 4\pi$

$E = -2 - \sqrt{2}$ $\quad$ $F = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$

EXERCICE 88

x est l'abscisse d'un point M d'une droite graduée. Les points A, B et C de cette droite ont pour abscisses respectives 3, -3 et 5.

Traduire chacune des phrases suivantes à l'aide d'une valeur absolue et placer sur la droite les points M correspondants (une droite par question):

1. La distance OM vaut 5.
2. La distance OM est inférieure ou égale à 1.
3. La distance AM vaut 7.
4. La distance CM vaut 3 et la distance AM est strictement inférieure à 2.

EXERCICE 89

Justifier les égalités suivantes :

a) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$

b) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$

EXERCICE 90

Trouver les réels x satisfaisant à la condition indiquée.

a) $|x-3| = 2$ $\quad$ b) $|3-x| = 3$

EXERCICE 91

Caractériser à l'aide de la notation valeur absolue l'ensemble des réels x satisfaisant à la condition indiqué :

a) $x \in [2 ; 12]$

b) $x \in]-2 ; 9[$

EXERCICE 92

a, b et c étant trois nombres réels, simplifier l'expression :

$$A = \frac{a+b}{ab}\left(a^2+b^2-c^2\right) + \frac{b+c}{bc}\left(b^2+c^2-a^2\right) + \frac{c+a}{ca}\left(c^2+a^2-b^2\right)$$

EXERCICE 93

x, y et z étant trois nombres réels, tels que xyz = 1, simplifier l'expression

$$A = \frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{zx+z+1}$$

EXERCICE 94

On pose

$X = a+b+c+d$; $Y = a+b-c-d$; $Z = a-b+c-d$; $T = a-b-c+d$

Démontrer que si l'on a $ab(a^2+b^2) = cd(c^2+d^2)$, on a aussi $XY(X^2+Y^2) = ZT(Z^2+T^2)$

EXERCICE 95

a, b, c , d, p, q, r étant six réels tels que $pqr \neq 0$

Démontrer que si l'on a $p+q+r=1$ alors $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=0$

EXERCICE 96

Démontrer que a, b et c désignant trois nombres réels non nuls, on ne peut avoir

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ que si deux de ces nombres sont opposés

EXERCICE 97

Simplifier l'expression $E = \frac{4a^2-1}{(a-b)(a-c)} + \frac{4b^2-1}{(b-a)(b-c)} + \frac{4c^2-1}{(c-a)(c-b)}$

EXERCICE 98

On considère le produit $P = \left[x^{2p}+y^{2p}\right] \times \left[x^{2p}-y^{2p}\right]$

1) Développer ce produit.
2) En supposant $x=10^4$, $y=10^2$, $p=2$, déterminer le nombre de zéros le nombre P est terminé.

EXERCICE 99

Calculer le nombre positif v tel que l'on ait $v^2 = \frac{(0,0000000004)^3 \times 8100000000}{(0,00000012)^4}$

EXERCICE 100

Simplifier l'expression $A = \frac{ab^{-2} \times (a^{-1}b^2) \times (ab^{-1})^2}{a^{-2}b \times (a^2b^{-1})^3 \times a^{-1}b}$ et calculer sa valeur pour $a = 10^{-3}$, $b = -10^{-2}$

EXERCICE 101

m et n étant deux entiers, positifs ou nuls, donner les différentes valeurs possibles de l'expression : $A = \frac{5(-1)^m + 7(-1)^{n+1} + 8(-1)^{m+n}}{2(-1)^{m-n}}$

EXERCICE 102

m et n étant deux nombres quelconques, comparer les nombres $x = |m-n|$ et $y = \left||m|-|n|\right|$

EXERCICE 103

a et b étant trois réels strictement positifs tel que l'on ait $a^2 = b^2 + c^2$

1. Comparer a et $b+c$
2. Comparer a^3 et b^3+c^3

EXERCICE 104

1. Comparer les nombres $5-2\sqrt{5}$ et $\sqrt{45-20\sqrt{5}}$
2. Calculer la moyenne proportionnelle des nombres $5+2\sqrt{5}$ et $85-38\sqrt{5}$

EXERCICE 105

On considère le nombre $A=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-2\right)\sqrt{\sqrt{3}+2}$

Calculer A^2 et en déduire la valeur de A

EXERCICE 106

Rendre rationnel le dénominateur du nombre $A=\dfrac{6}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

EXERCICE 107

Simplifier le nombre $A=\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}$

EXERCICE 108

1. Rendre le dénominateur de la fraction $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$, puis la mettre sous forme d'une différence de deux fractions ayant toutes deux le nombre 1 pour numérateur.
2. Calculer la somme $\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$

EXERCICE 109

On désigne par a, b et m trois réels positifs tels que $a>b$ et m strictement positif

Comparer les nombres $A=\sqrt{a+m}-\sqrt{a}$ et $B=\sqrt{b+m}-\sqrt{b}$

EXERCICE 110

Soit a, b, c, a', b', c' des nombres réels strictement positifs.

Montrer que si l'on a $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$, on a aussi $\sqrt{aa'}+\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'}=\sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}$

EXERCICE 111

Simplifier chacune des expressions suivantes :

1. $A=\sqrt{\left(\sqrt{3}-3\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}+3\right)^2}$
2. $B=\sqrt{\dfrac{1}{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}}$

EXERCICE 112

Calculer la valeur numérique de l'expression $y=\dfrac{(x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+1}}$ pour

1. $x=2+\sqrt{3}$
2. $x=2-\sqrt{3}$

EXERCICE 113

a et b étant deux réels strictement positifs, calculer la valeur de l'expression $y = \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ pour $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$

EXERCICE 114

On considère l'expression $y = x + \sqrt{x^2-1}$

1. Sachant que $x = \sqrt{\frac{a}{8}} + \sqrt{\frac{1}{2a}}$ (a>0), calculer x^2-1, puis $\sqrt{x^2-1}$
2. Exprimer y en fonction de a. Vérifier le résultat pour a = 1 et pour a = 6

EXERCICE 115

Démontrer que quels que soient les nombres réels x et y distincts et non nuls, on a :

$$A = \frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{(x-y)^2}}{x-y}\left[\frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{y^2}}{y}\right] = 1$$

EXERCICE 116

Déterminer a et b pour que le polynôme $ax^4 + bx^3 + 1$ puisse se factoriser, l'un des facteurs étant $(x-1)^2$

EXERCICE 117

Factoriser le polynôme $P = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ en facteurs du second degré sachant que l'on a $a + d = b + e = c$

EXERCICE 118

Déterminer les coefficients a et b pour que le polynôme $x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 1$ soit le carré d'un autre polynôme.

EXERCICE 119

Déterminer les coefficients a et b pour que le polynôme $4x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 1$ soit le carré d'un autre polynôme.

EXERCICE 120

Montrer que l'expression $A = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}\right)\left(-\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)$ se réduit à un polynôme.

EXERCICE 121

Factoriser si possible les trois polynômes suivants :

$A = 3x^2 - 5x - 2$; $B = -2x^2 - x + 1$; $C = 5x^2 + 2x + 3$

EXERCICE 122

Développer le plus simplement possible les produits suivants

1. $P(x)=\left(x^2-1\right)\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)$
2. $P(x)=\left(x^2+x\sqrt{3}+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2-x\sqrt{3}+1\right)$

EXERCICE 123

Etant donné le polynôme $f(x)=4x^3-24x^2+45x-27$

Calculer f(3), puis factoriser ce polynôme.

EXERCICE 124

Calculer la valeur du polynôme $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+y^4-2x^3y+2xy^3$ pour $x=\sqrt{3}$ et $y=\sqrt{2}$, puis, du résultat obtenu, déduire la valeur du polynôme pour $x=\sqrt{15}$ et $y=\sqrt{10}$

EXERCICE 125

Simplifier l'expression $A=(yz+zx+xy)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-xyz\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)$

EXERCICE 126

Simplifier la fraction $y=\frac{x^2-2bx-4a(a-2b)-3b^2}{x^2-4ax+4a^2-b^2}$

EXERCICE 127

1. Décomposer en produit de facteurs l'expression $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$
2. Application : calculer la valeur de l'expression $x=\frac{a}{b+c}$, $y=\frac{b}{c+a}$, $z=\frac{c}{a+b}$

EXERCICE 128

Soit l'expression $y=\frac{|x|-1}{x^2-1}-\frac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de y
2. Simplifier y

EXERCICE130

Effectuer l'addition $y=\frac{x-x^q}{(1-x)(1-x^q)}+\frac{x^q-x^{pq}}{(1-x^q)(1-x^{pq})}$, $(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$

EXERCICE 131

Calculer la valeur numérique de l'expression $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ pour $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$

EXERCICE 132

Déterminer l'ensemble de définition de l'expression $A=\frac{x}{1-x}\sqrt{\frac{(1+x)^2(x-1)}{x^2}}$

EXERCICE 133

On considère l'expression $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

1. Déterminer son ensemble de définition
2. Simplifier cette expression, en calculant d'abord y^2 . Vérifier le résultat obtenu dans les deux cas suivants : $x=\dfrac{5}{4}$, $x=5$

EXERCICE 134

Mettre les nombres réels suivants sous forme de fractions irréductibles.

1. $\dfrac{\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}-\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}\times\frac{7}{8}-\frac{1}{8}}$
2. $\dfrac{8\left[\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right]^2-\frac{1}{2}}{9\left[\frac{1}{3}+2\right]^2+\frac{1}{6}}$
3. $\dfrac{-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+8\left(\frac{7}{2}\right)^2}{5\left(\frac{2}{5}\right)^2-6\left(\frac{4}{3}\right)^2}$
4. $\dfrac{6\left(3-\frac{1}{2}\right)\left(4+\frac{1}{3}\right)}{12\left(5+\frac{1}{4}\right)\left(7-\frac{1}{3}\right)}$
5. $\dfrac{\frac{7}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{4}}{\frac{3}{7}\times\left(1+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{4}}$
6. $\dfrac{\dfrac{3+\frac{1}{4}}{3-\frac{1}{4}}}{\dfrac{5+\frac{1}{2}}{5-\frac{1}{2}}}$
7. $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)}{\left(\frac{2}{7}-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{4}\right)}$

EXERCICE 135

1. Montrer que le réel $\dfrac{9\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{6\sqrt{7}+4\sqrt{2}}$ est rationnel
2. Soit a et b deux réels strictement positifs, montrer que $\dfrac{9\sqrt{a}+6\sqrt{b}}{6\sqrt{a}+4\sqrt{b}}$

EXERCICE 136

1. Montrer que le réel $\dfrac{7\sqrt{15}+\sqrt{0,6}}{5\sqrt{15}+\sqrt{0,6}}$ est rationnel
2. Soit a , b , c et d quatre rationnels tels que $d+5c\neq 0$, montrer que $\dfrac{a\sqrt{15}+b\sqrt{0,6}}{c\sqrt{15}+d\sqrt{0,6}}$ est rationnel

EXERCICE 137

Démontrer que si $a \geq 2$ et $b \leq -6$ alors $0 < \frac{b-a}{ab} < \frac{2}{3}$

EXERCICE 138

On donne $a \geq 2$ et $b \leq -3$

Encadrer $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$; $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

EXERCICE 139

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $\frac{x}{1-\sqrt{5}} \leq 1+\sqrt{5}$
2. $\frac{1}{x} \geq -2$

EXERCICE 140

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$

EXERCICE 141

Déterminer tous les triplets de nombres réels (a ; b ; c) tels que :

- $1 \leq a < b < c \leq 100$
- Chaque nombre a, b et c est premier.
- $b = a+2$ et $c = b+2$

EXERCICE 142

Montrer les égalités suivantes

1. $(x+3)^2 + x^2 = 2x(x+3)+9$ pour tout réel x.
2. $1+3^1+3^2+3^3 = \frac{3^4-1}{2}$
3. $1+2^1+2^2+2^3+2^4 = 2^5-1$
4. $2x^2-8x+15 = 2(x-2)^2+7$
5. $(x+5)(x-3) = (x+1)^2-16$
6. $a^2+ab+b^2 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}$ pour tous réels a et b
7. $\frac{1}{x+1} - \frac{9}{x-1} = -\frac{8x+10}{x^2-1}$ avec $x \neq 1$ et $x \neq -1$
8. Montrer que, $1+q+q^2 = \frac{q^3-1}{q-1}$ avec q ≠ 1
9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x+1)^2-9+(x-2)^2+3 = 2\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right)$
10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x-2)(x+3)(x-1) = x^3-7x+6$

11. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2\sqrt{x^2 + 3x + \frac{9}{4}} = 2x + 3$

EXERCICE 143

Compléter les expressions suivantes :

$(.... + ...)^2 = 4x^2 + ... + y^2$

$(x + ...)^2 = ... + 4xy + ...$

$(4x - ....)^2 = ... - .... + 9y^2$

$(.... - ....)^2 = ... - 6ab + b^2$

$(.... + ...)^2 = 4x^2 + ... + y^2$

$(x + ...)^2 = ... + 4xy + ...$

$(4x - ....)^2 = ... - .... + 9y^2$

$(.... - ....)^2 = ... - 6ab + b^2$

$(.... - 3y)^2 = ... - 12xy + ...$

$(.... - 2y)(.... + 2y) = 9x^2 - ....$

$(3\sqrt{5} + ...)(3\sqrt{5} - ....) = ... - 1$

$(.... + ...)(.... + ...) = 25x^2 - 4$

$(.... - 3y)^2 = ... - 12xy + ...$

$(.... - 2y)(.... + 2y) = 9x^2 - ....$

$(3\sqrt{5} + ...)(3\sqrt{5} - ....) = ... - 1$

$(.... + ...)(.... + ...) = 25x^2 - 4$

EXERCICE 144

Comparer $1 + \sqrt{7}$ et $\sqrt{2\sqrt{7} + 8}$.

EXERCICE 145

Soit x un nombre réel strictement positif.

On note $A = x + \frac{1}{x}$ et $B = 2$.

Comparer A et B.

EXERCICE 146

Soient m et p deux nombres réels strictement positifs tels que : $m < p$.

1. Comparer $\frac{1}{m + 3}$ et $\frac{1}{p + 3}$.

2. Comparer $\sqrt{\frac{m + 1}{5}}$ et $\sqrt{\frac{p + 1}{5}}$.

EXERCICE 147

b est un réel tel que : $2 < b < 3$

1. Donner un encadrement de $\frac{2 - b^2}{5}$.

2. On se donne de plus le réel a tel que : $1 < a < 2$. Donner un encadrement de $b - 2a$.

EXERCICE 148

Déterminer si les nombres suivants sont premiers. S'ils ne sont pas premiers, donner leur décomposition en produit de facteurs premiers.

27 ; 35 ; 56 ; 31 ; 17 ; 147 ; 264 ; 81 ; 105 ; 621 ; 819000

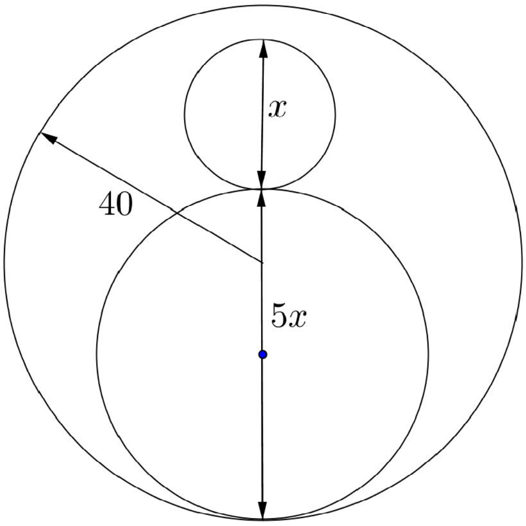
EXERCICE 149

Ranger les nombres a, a^2, a^3 dans l'ordre croissant dans les deux cas suivants :

1. $a = \sqrt{2} - 1$

2. $a = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{3}$

EXERCICE 150



La figure représente une pièce métallique percée.

La somme des périmètres des deux cercles intérieurs est entre 187 mm et 190 mm.

1. a) Exprimer la somme des périmètres P(x) des deux cercles en fonction de x.

b) Exprimer l'aire A(x) de la pièce métallique en fonction de x.

2. a) Déterminer un encadrement de x par deux décimaux d'ordre 1 (c'est à dire avec un chiffre après la virgule). Indication : utiliser le périmètre des deux cercles.

b) Encadrer l'aire par deux entiers.

EXERCICE 151

Simplifiez les expressions suivantes

$A = \left(2^3 \times 2^{-4}\right)^2 \times \left(3^3\right)^2 \times 3^{-5}$

$B = 2^3 \times 2^4 \times 2^{-5}$

$C = \left(2^3 \times 3^2\right)^2$

$D = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times 3^3$

$E = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 \times 5^{-2} \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^3$

$F = \left(\dfrac{2}{7}\right)^4 \times \left(\dfrac{7}{4}\right)^2 \times \left(\dfrac{-49}{2}\right)^3$

$G = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^4 \times \left(\dfrac{27}{4}\right)^{-1}$

$H = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{a-1}}\right)\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{a-1}}\right)\left(\dfrac{a-1}{a}\right)$

EXERCICE 152

1) Choisir trois chiffres distincts. Calculer leur somme s.
2) Ecrire les six nombres possibles que l'on peut obtenir en permutant ces trois chiffres.
3) Calculer la somme S de ces six nombres. Calculer le quotient de S par s.
   Recommencer deux fois avec trois autres chiffres. Que remarque-t-on ?
4) Démontrer le résultat conjecturé à la deuxième question.

EXERCICE 153

Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

EXERCICE 154

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

EXERCICE 155

Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ En déduire l'existence d'irrationnels a, b > 0 tels que a^b soit rationnel

Montrer que $\forall a,b,c \in \mathbb{R}, ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$

EXERCICE 156

Montrer que $\forall u,v \geq 0,\ 1+\sqrt{uv} \leq \sqrt{1+u}\sqrt{1+v}$

EXERCICE 157

x, y et z sont des réels positifs

1) Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$
2) Montrer $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ quand a – ton l'égalité ?
3) En déduire que $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$

EXERCICE 158

x et y sont des réels dont la somme est égale à 1

1) Exprimer y en fonction de x et montrer que $xy \leq \dfrac{1}{4}$
2) Montrer qu'on a $x^2+y^2 \geq \dfrac{1}{2}$

   Comment faut – il choisir x et y pour que cette inégalité devienne une égalité ?

EXERCICE 159

x et y sont des nombres strictement positifs. On considère les nombres les nombres $a=x+\dfrac{1}{x}$, $b=y+\dfrac{1}{y}$ et $c=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

1) vérifier que $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2-2$ et exprimer $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ et $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ à l'aide de a
2) A partir du calcul de a^2 et b^2, et abc, montrer que $a^2+b^2+c^2=4$
3) Montrer que a et c vérifient $a \geq 2$ et $c \geq 2$ et en déduire que $a+b+c \geq 2$ et que $abc \geq 8$

   Est –il vrai que $a^2+b^2+c^2 \geq 2$
4) On suppose que $0,2 \leq x \leq 0,3$ et $-2 \leq y \leq -1$. Donner alors le meilleur encadrement possible pour a, b et c

EXERCICE 160

a et b sont des réels et c est un réel positif.

Montrer que si $|a|<c$ et $|b|<c$ alors $\frac{|a+b|}{2}+\frac{|a-b|}{2}<c$

Montrer que si $\frac{|a+b|}{2}+\frac{|a-b|}{2}<c$ alors $|a|<c$ et $|b|<c$

EXERCICE 161

Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormal, les ensembles de points dont les coordonnées x et y vérifient :

$|x-5|\geq 1$ et $|x-5|\leq 2$

$1\leq |x-5|\leq 2$ et $1\leq |y-3|\leq 2$

EXERCICE 162

1) Vérifier que, pour tout réel x et y réels, on a : $x+y+xy+1=(x+1)(y+1)$ et $x+y-xy-1=(x-1)(1-y)$
2) On se place dans le cas où $|x|<1$ et $|y|<1$ Montrer que $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right|<1$

EXERCICE 163

Déterminer la nature des nombres suivants :

$A=-\frac{\sqrt{144}}{3}$ $\quad C=\frac{\left(\sqrt{5}+3\right)\left(\sqrt{5}-3\right)}{400}$ $\quad E=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}}$

$B=\frac{\pi}{314}$ $\quad D=0,3333$

EXERCICE 164

Deux nombres a et b vérifient les conditions :

$a+b=1$ et $a^2+b^2=2$

a) Calculer la valeur du réel ab. a et b sont-ils des entiers relatifs ?

b) Vérifier que les deux réels $a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ et $b=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Vérifient les conditions imposées.

c) Utiliser la calculatrice pour donner les arrondis, notés a' et b' à 10^{-5} de a et de b.

d) L'arrondi à 10^{-5} près de $a^2+b^2=2$ est-il égale à l'arrondi à 10^{-5} près de $a'^2+b'^2$?

EXERCICE 165

Déterminer à quels intervalles appartiennent les nombres x, y et z sachant que :

• l'arrondi de x à 10^{-2} près est 2,52.

• la valeur approchée par défaut de y à 10^{-2} près est 4,21.

• la valeur approchée par excès de z à 10^{-2} près est 12,340

EXERCICE 166

1. On donne $A=-\dfrac{13}{80}$ et $F=\dfrac{17}{26}$

   En utilisant la calculatrice, expliquer comment le résultat d'une division permet de dire que $E\in D$ et que $F\notin D$.

2. Montrer que E peut s''ecrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ où $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$. Que peut-on en déduire pour E ?

3. Expliquer pourquoi F ne peut pas s''ecrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ o`u $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$.

EXERCICE 167

a et b sont deux nombres tels que $\left|a-\dfrac{1}{2}\right|\leq 1$ et $|b-1|\leq\dfrac{1}{2}$

1) A quels intervalles appartiennent a et b ?
2) Donner un encadrement de a+b , a-b , $a^2 + b^2$

EXERCICE 168

Sachant que $|x-1|<2$ et $|y|\leq\dfrac{1}{2}$ donner un encadrement à l'aide de nombres décimaux à une décimale de :

$|x|$ $\quad$ $|y|$ $\quad$ $\dfrac{1}{|y|}$ $\quad$ $\left|\dfrac{x}{y}\right|$ $\quad$ $\dfrac{x}{y}$

EXERCICE 169

a, b et c sont trois réels

1) Montrer que $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$
2) Développer et réduire $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$ En déduire que $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\geq 0$
   Dans quel(s) cas cette inégalité est –elle une égalité.
3) Montrer que $\dfrac{|a+b+c|}{\sqrt{3}}\leq\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ Dans quel cas y a t- il égalité ?
4) On suppose que x, y et z sont des réels positifs. Montrer que $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{3}\leq\sqrt{\dfrac{x+y+z}{3}}$

EXERCICE 170

1. Choisir deux nombres strictement positifs et vérifier que le quotient de leur produit par leur somme est inférieur au quart de cette somme.
2. Ce qui a été constaté sur un exemple est toujours vrai.

En effet : démontrer que si a > 0 et si b > 0 alors on a $\dfrac{ab}{a+b}\leq\dfrac{a+b}{4}$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

2. En déduire que si a>0, b> 0 et c>0 alors $\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ca}{c+a}\leq\dfrac{a+b+c}{2}$

EXERCICE 171

Soit p le produit de quatre entiers naturels consécutifs : $p = n(n+1)(n+2)(n+3)$ avec $n \in \mathbb{N}$

1) Vérifier que : $(n+1)(n+2) = n(n+3)+2$

2) On pose : $a = (n+1)(n+2)$ $a = (n+1)(n+2)$

Exprimer p en fonction de a.

3) En déduire que $p+1$ est un carré parfait.

Rappel : Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.

EXERCICE 172

On pose pour x réel : $f_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$

On définit ensuite : $f_2(x) = f_1(f_1(x)) = f_1\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}} = \dfrac{1}{\dfrac{1-x-1}{1-x}} = \dfrac{x-1}{x}$,

puis $f_3(x) = f_1(f_1(f_1(x)))$, $f_4(x) = f_1(f_1(f_1(f_1(x))))$, etc …

Déterminer $f_{2006}(2006)$

EXERCICE 173

Démontrer que $5+\sqrt{8} = \sqrt{33+20\sqrt{2}}$

2) Démontrer que pour tous réels x et y non nuls : $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{xy} = \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2$

3) Démontrer que pour tout entier relatif n et tout réel x non nul : $\left(x^n + x^{-n}\right)^2 - \left(x^n - x^{-n}\right)^2 = 4$

EXERCICE 174

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto ax^{2004}+bx^4+cx^2+5$ ou a, b et c sont des réels donnés.

si $f(-2004) = 2004$, peut on en déduire $f(2004)$? (justifier !!)

EXERCICE 175

1) Déterminer le nombre d' entiers premiers inférieurs à 10000 se terminant par 2 ?

2) Déterminer le nombre d' entiers premiers inférieurs à 100 se terminant par 3 ?

3) Peut-on trouver trois entiers premiers consécutifs ?

EXERCICE 176

Le nombre ci-dessous est-il entier ? (justifier bien sûr !!)

$$L = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9998}+\sqrt{9999}} + \frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10000}}$$

EXERCICE 177

1. Etablir pour tout entier naturel non nul p l'égalité suivante :

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}=\frac{1}{p(p+1)}$$

2. En déduire la valeur de la somme suivante : $S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{2003\times 2004}+\frac{1}{2004\times 2005}$

EXERCICE 178

Dans cet exercice, nous utiliserons le fait que tout entier naturel pair (resp. impair) s'écrit sous la forme $2n$ (resp. $2n+1$) où n est un entier naturel.

Démontrer les assertions suivantes :

1. La somme de deux entiers impairs est un entier pair.
2. Le produit d'un entier pair par un entier impair est pair.
3. Le produit de deux entiers consécutifs est un entier pair.
4. La somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de

EXERCICE 179

Ecrire A sous forme de fraction irréductible. $A=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}$

2. a. Montrer que A est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-1} près.

   b. A est-il une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-2} près ?

EXERCICE 180

1.La somme de deux entiers consécutifs est-elle divisible par 2 ?

2. On considère trois entiers consécutifs quelconques. On note n le premier.

Exprimer la somme de ces trois entiers en fonction de n et expliquer pourquoi elle est divisible par 3.

3. Soit n un entier naturel impair. Expliquer pourquoi $(n-1)\times n\times(n+1)$ est divisible par 8.

4. a) Soit n un entier naturel, développer le produit $(n+1)(n+2)$

   En déduire une factorisation de $E(n)=\left(n^2+3n+1\right)^2-1$

   b) Lorsque l'on augmente de 1 le produit de quatre nombres entiers consécutifs, obtient-on un carré parfait ?

EXERCICE 181

1) Quel nombre faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{5}{4}$ pour obtenir le double de $\frac{5}{4}$?

2) Quel nombre faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{7}{3}$ pour obtenir l'inverse de $\frac{7}{3}$?

EXERCICE 182

Simplifier l'écriture des nombres suivants, puis indiquer lesquels sont des nombres décimaux :

1) $a = \dfrac{2^2 \times 3^2 \times 5^4}{2^3 \times 3 \times 5^3}$

2) $b = \dfrac{2^{-1} \times 5}{5^2 \times 3^{-2} \times 6^3}$

3) $c = \dfrac{2^6 \times 10^{-3} - 3 \times 10^{-2}}{13 \times 10^{-2}}$

EXERCICE 183

Pour chacun des nombres suivants, simplifier l'écriture puis, en déduire le plus petit ensemble ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) auquel il appartient :

$A = \left(1 - \sqrt{16}\right)^2$

$B = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{20} - \sqrt{45}}{\sqrt{180}}$

$C = \left(\dfrac{\sqrt{8} - \sqrt{18}}{3}\right)^2$

$D = \dfrac{2\sqrt{6} - \sqrt{8}}{\sqrt{2}} - \dfrac{6}{\sqrt{3}}$

$E = \dfrac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$F = \dfrac{1}{1 - \sqrt{2}} - \dfrac{1}{1 + \sqrt{2}}$

$G = \dfrac{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2}{2 - \sqrt{3}}$

$H = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{8}}{\sqrt{2} - \sqrt{8}}$

$I = \left(\sqrt{4 - \sqrt{12}} - \sqrt{4 + \sqrt{12}}\right)^2$

$J = -\sqrt{(\pi - 4)^2} - \sqrt{(-2 + \pi)^2}$

$K = \dfrac{16 \times 10^{-5} \times 3 \times 10^4}{-24 \times 10^{-3}}$

$M = \dfrac{5}{4} - \dfrac{2}{3} \div \dfrac{16}{9}$

EXERCICE 184

Le réel $a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est-il solution de l'équation $x^2 - x - 1$?

2. Soit le réel $b = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Vérifier que $1 + \dfrac{1}{b} = b$.

3. L'opposé du réel b est-il égal à l'inverse du réel a ?

EXERCICE 185

1) Montrer que pour tout entier naturel n, le réel $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ est l'inverse du réel $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

2) En déduire la valeur de $A = \dfrac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{1}} - \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4} - \sqrt{3}}$.

EXERCICE 186

1. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a \leq b$.

Ranger dans l'ordre croissant a, b, leurs moyennes arithmétique m_1, géométrique m_2 et harmonique m_3.

$m_1 = \dfrac{a+b}{2}$; $m_2 = \sqrt{a \times b}$; $\dfrac{2}{m_3} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

2. Soient x, y et z trois réels, démonter que : $\left.\begin{array}{l}|x+y|\le z\\|x-y|\le z\end{array}\right\}\Rightarrow x+y\le z, \forall z\in\mathbb{R}^+$

EXERCICE 187

1. Soit x un réel strictement négatif.

On pose : $F(x)=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x^2}}-2x+1$

a) Donner une écriture simplifiée de $F(x)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $|F(x)+3x-1|>\frac{3}{4}$

2. Résoudre dans R les inéquations suivantes.

a) $|x+1|-|3x+2|>0$

b) $|x-2|\ge|x^2-4x+4|$

c) $\frac{|x+1|}{2x-1}<0$

EXERCICE 188

1. $x=\frac{a+b}{2}$ et $y=\frac{a-b}{2}$, exprimer x^2-y^2 en fonction de a et b.
2. $x+y=a$ et $xy=b$. Exprimer $(x-y)^2$ en fonction de a et b.

EXERCICE 189

Écrire sans radical au dénominateur $A=\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}-\sqrt{7}$

2) Simplifier l'expression suivante : $B=\left(\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2$

3) En déduire que le triangle EFG dont les dimensions sont données ci-dessous est rectangle.

$EF=\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}-\sqrt{7}$ FG = $FG=\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{3}{5}}$ $EG=\sqrt{\frac{26}{15}}$

EXERCICE 190

1. Simplifier les expressions suivantes :

$A=\frac{\left(3^2\times7^5\right)^{-3}}{\left(7^2\times3^{-3}\right)^2}\times\left(\frac{(7\times3)^2}{3^2\times7}\right)$ et $B=\frac{\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5+\sqrt{2}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}}}$

2. Comparer les réels suivants :

$C=\sqrt{3}-5$ et $D=\sqrt{28-10\sqrt{3}}$, $E=\sqrt{5}-1$ et $F=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

3. Écrire les nombres suivants sous une forme plus simple :

$G=\sqrt{54}-\sqrt{24}+\sqrt{150}$ $I=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-3}$ $J=\frac{\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}}{\sqrt{135}-\sqrt{15}}$

$H=\sqrt{20}-2\sqrt{125}+\sqrt{180}$

EXERCICE 191

1. $K = \dfrac{(0,05)^3 \times 21^3 \times (-49^{-3})}{-25 \times 81 \times (35)^{-3}}$

a) Préciser le signe de K.

b) Écrire K sous la forme d'un produit de puissance de nombres premiers.

2. Soit $L = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}$

a) Calculer L^2.

b) Préciser le signe de L en justifiant votre réponse.

c) Déduire de a) et de b) la valeur de L.

EXERCICE 192

a) Étant donné a tel que : $a = \sqrt[3]{1+\sqrt{\dfrac{152}{27}}} - \sqrt[3]{-1+\sqrt{\dfrac{152}{27}}}$. Montrer que $a^3 + 5a$ est un entier.

b) Déterminer une expression algébrique P à coefficients entiers telle que $P(a) = 0$:

i) quand $a = \sqrt{2} + \sqrt{5}$

ii) quand $a = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$

c) Démontrer que les assertions suivantes sont vraies :

i) Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$. Montrer que $b^2 + 3a^2 < (a+b)^2$ et en déduire que $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 > 9$

ii) Pour tous réels x et y on a : $|x-y| \leq |x| + |y|$.

EXERCICE 193

Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que $abc > 1$ et $a + b + c < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

1. Montrer qu'aucun de ces trois nombres n'est négatif.
2. Montrer que l'un au moins est plus petit que 1.