

# POLYNOMES, FRACTIONS RATIONNELLES

## EXERCICE 1

Factoriser les expressions suivantes :

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1. $x^2 - 15x + 36$                        | 12. $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$              | 22. $(a+b)^3 + 2(a^3 + b^3)$            |
| 2. $2x^2 + 7x - 9$                         | 13. $2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y - 2$             | 23. $xy(a^2 + b^2) + ab(x^2 + y^2)$     |
| 3. $2x^2 + 5x + 7$                         | 14. $a^2 - 2b^2 - 6c^2 + ab - ac + 7bc$          | 24. $(ax - by)^2 - (ay - bx)^2$         |
| 4. $x^4 + 3x^2 - 11x^2 - 3x + 10$          | 15. $(x^2 - a^2)^2 + 2ay(x^2 + y^2 - a^2) - y^4$ | 25. $(a^2 + 3ab + b^2)^2 - b^4$         |
| 5. $x^4 + x^2 + 1$                         | 16. $x^3 + 3x - 4$                               | 26. $x^2 - y^2 + yz + 2z^2 + 3zx$       |
| 6. $x^8 - 256$                             | 17. $x^4 - 13x^2 + 36$                           | 27. $2a^2 - b^2 - 3c^2 + ab + ac + 4bc$ |
| 7. $x^4 - 3x^2 - 6x + 8$                   | 18. $x^4 + 4$                                    | 28. $z^3 - 3xz^2 + (x - 2y)^2(3x - z)$  |
| 8. $(x + y)^5 - (x^5 + y^5)$               | 19. $x^8 - 16$                                   |   |
| 9. $x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 - 3x^2y^2z^2$ | 20. $x^4 - 8x^2 + 4$                             |   |
| 10. $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$    | 21. $(x + y)^3 - (x^3 + y^3)$                    |   |
| 11. $(ax + by)^2 + (bx - ay)^2$            |  |   |

## EXERCICE 2

Mettre les polynômes suivants sous la forme canonique et dire s'ils sont factorisables ou pas.

- |                          |   |
|--------------------------|---|
| 1) $2x^2 - 3x + 2$       | 6) $x^2 - 3x - 2$                         |
| 2) $x^2 + 3x + 1$        | 7) $6x^2 + 2x + 1$                        |
| 3) $3x^2 - x$            | 8) $-3x^2 + x + 1$                        |
| 4) $2x^2 - 9x + 4$       | 9) $25x^2 - 10x + 1$                      |
| 5) $9x^2 + 6x + 1$       | 10) $x^2 - x + 2$                         |
| 11) $4x^2 + 8x + 5$      | 18) $\frac{3}{2}x^2 + 11x - 6$            |
| 12) $3x^2 + 8x - 3$      | 19) $-\frac{1}{2}x^2 - x - 1$             |
| 13) $0,01x^2 - 2x + 100$ | 20) $2x^2 - 3x + 4$                       |
| 14) $-x^2 - x + 6$       | 21) $2x^2 + 9x$                           |
| 15) $x^2 - 11x + 30$     | 22) $-16x^2 + 24x - 9$                    |
| 16) $-7x^2 + 5x + 2$     | 23) $10x^2 - 4x - 6$                      |
| 17) $-x^2 + 6x + 2$      | 24) $-8x^2 - x - 3$                       |
|                          | 25) $-\frac{5}{3}x^2 - \frac{4}{5}x - 12$ |
|                          | 26) $11x^2 + 2x + 3$                      |
|                          | 27) $24x^2 + 13x - 9$                     |

**EXERCICE 3**

Simplifier les expressions rationnelles suivantes :

1. 
$$\frac{(x+y-1)^2+1}{(xy-1)^2-(x-y)^2}$$

2. 
$$\frac{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}{ab(x^2+y^2)-xy(a^2+b^2)}$$

3. 
$$\frac{(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2}{(a^2-b^2+c^2)^2-4a^2c^2}$$

4. 
$$\frac{(x+y)^5-(x^5+y^5)}{(x+y)^3-(x^3+y^3)} \times \frac{x-y}{x^3-y^3}$$

5. 
$$\frac{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}{x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^2-y^3)}$$

6. 
$$\frac{a(x^2-1)+b(a^2-1)}{a(x^2+1)+b(a^2+1)}$$

7. 
$$\frac{(ax+mb)^2+m(ay+bx)^2}{(x^2-my^2)^2+4mx^2y^2}$$

8. 
$$\frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-4(ab+cd)^2}{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2-4(ac+bd)^2}$$

9. 
$$\frac{x^5+y^5+z^5-(x+y+z)^5}{x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3}$$

10. 
$$\frac{2x^2+2y^2+z^2-5xy+3xz-3yz}{2x^2-2y^2-3xy+2xz+yz}$$

**EXERCICE 4**

 1. Déterminer les constantes a et b pour que, pour que, quel que soit  $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ 

 2. Calculer la somme  $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ 
**EXERCICE 5**

 Calculer en fonction de :  $a+b = s$  et  $ab = P$  l'expression symétrique suivante :

$$\frac{a^4 - a^3b + a^2b + ab^3 - ab^2 - b^4}{a^3 + 2a^2b - 2ab^2 - b^3}$$

**EXERCICE 6**

 Sachant que  $x^3 + x - 3 = 0$ , calculer la valeur numérique de :

$$\frac{x^9 + x^8 + x^7 - 4x^6 - 4x^5 + 7x^3 + 7x^2 + 2x + 14}{x^8 - 2x^5 + x^4 + 6x^3 - x + 4}$$

**EXERCICE 7**

Déterminer les constantes a et b pour que, pour que, quel que soit

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x(x+1)} + \frac{b}{(x+1)(x+2)}$$

 1. Calculer la somme  $S = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 
**EXERCICE 8**

On donne les polynômes suivants :

$$A = x^4 - 3x + 5$$

$$B = x^3 - 5x^2 + 7x - 6$$

$$C = x^4 + 7x^2 - 3x - 9$$

Calculer

$$A + B + C$$

$$B + C - A$$

$$C + A - B$$

$$A + B - C$$

**EXERCICE 9**

On donne les polynômes suivants :

$$A = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$$

$$B = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 9x - 1$$

$$C = x^4 + 7x^2 - 5x - 1$$

$$D = x^4 + 11x^3 - 3x + 7$$

Calculer

$$(A + B) - (C + D)$$

$$(A - B) + (C - D)$$

$$(A - B) - (C - D)$$

**EXERCICE 10**

On donne les polynômes suivants :

$$A = x^3 - 5x^2 + 7x - 6$$

$$B = 2x^3 - 11x - 1$$

$$C = 5x^2 - 4x - 9$$

Calculer

$$AB$$

$$BC$$

$$A^2$$

$$C^2$$

$$AC$$

$$ABC$$

$$B^2$$

**EXERCICE 11**

Déterminer le polynôme du second degré ayant pour racines 1 et -3 et tel que  $p(-2)=6$

**EXERCICE 12**

Déterminer le polynôme du second degré dont l'une des racines est 2 et  $p(1)=3$  et  $p(2)=5$

**EXERCICE 13**

On pose  $x = a - b$  avec  $ab = 1$

1. Calculer l'expression  $A = x^6 + 6x^4 + 9x^2 - 1$

2. Montrer que pour  $x = \sqrt[3]{\sqrt{6} + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$  l'expression A est un nombre entier

**EXERCICE 14**

Démontrer que les polynômes suivants sont les carrés de polynômes que l'on déterminera

1.  $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$

4.  $x^4 + 4x^3y + 2x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

2.  $4x^4 - 12x^3 + 5x^2 + 6x + 1$

5.  $x^8 - 6x^7 + 13x^6 - 18x^5 + 24x^4 - 18x^3 + 13x^2 - 6x + 1$

3.  $4x^6 - 20x^4 + 28x^3 + 25x^2 - 70x + 49$

**EXERCICE 15**

Soit  $p(x) = x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6$

1. Comment faut-il choisir les coefficients de ce polynôme pour que l'on ait à la fois

$$p(x) \equiv x^6 p\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } p(x) \equiv p(x-1)$$

2. Montrer que  $p(x)$  s'écrit :  $(x^2 - x + 1)^2 + m(x^2 - x)$ . Calculer les six racines de ce polynôme en fonction de l'une d'elles  $x = \lambda$

**EXERCICE 16**

Effectuer les divisions suivantes

a)  $5x^3 - 6x^2 + 7x + 8$  par  $x^2 - 3x + 4$

d)  $4x^3 - 5x^2 + 7x - 3$  par  $x - 2$

b)  $7x^4 - 4x^2 + 3x - 5$  par  $2x^2 + 3x - 1$

e)  $5x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x - 9$  par  $x + 3$

c)  $2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 2$  par  $x^3 + x^2 + x + 1$

**EXERCICE 17**

Décomposer les expressions rationnelles suivantes en éléments simples

1)  $\frac{x^2 + 3x + 7}{x - 1}$

8)  $\frac{x^2 + 3x + 7}{x - 1}$

15)  $\frac{2x^3 - 5x + 6}{3x^2 + 7x + 2}$

2)  $\frac{(x-3)(2x+5)}{3x+1}$

9)  $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

16)  $\frac{x^3 - 1}{x(-x+3)}$

3)  $\frac{-x^2 + 2x - 5}{x + 3}$

10)  $\frac{x^3 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

17)  $\frac{x^3}{x-1}$

4)  $\frac{4x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$

11)  $\frac{x^3 - 2}{x - 1}$

18)  $\frac{x^3 + 1}{2x + 1}$

5)  $\frac{-6x^3 + 5x^2 + 7 - 2}{(x-1)^2}$

12)  $\frac{x^3 - 8}{x^2 + 1}$

6)  $\frac{2x^2 - 3}{x + 1}$

13)  $\frac{x^3 + 27}{3x + 9}$

7)  $\frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + x + 1}$

14)  $\frac{3x^2 + 4x - 7}{2x^2 + x - 3}$

**EXERCICE 18**

Décomposer les expressions rationnelles suivantes en éléments simples

1)  $\frac{x^2}{x(x-1)}$

8)  $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 1}$

15)  $\frac{1-x}{x^2(x+1)(x-2)}$

2)  $\frac{x-1}{3-x}$

9)  $\frac{2x^2 + x}{x-1}$

16)  $\frac{x+1}{x^2(x-1)^2}$

3)  $\frac{2x-1}{x+2}$

10)  $\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$

17)  $\frac{x^2 + 3x}{x^3(1-x)^2}$

4)  $\frac{x^2 + x + 2}{x+1}$

11)  $\frac{1}{x^2(x+1)}$

18)  $\frac{1-x^2}{(3x-1)^2}$

5)  $\frac{x^2 + 5x + 6}{2x - 6}$

12)  $\frac{2x-3}{x^2(x+2)}$

6)  $\frac{x}{2x-1}$

13)  $\frac{x}{(x+2)(2-x)}$

7)  $\frac{x^2}{x+1}$

14)  $\frac{x}{(x-1)^2}$

**EXERCICE 19**

Donner suivant la valeur de  $x$ , le signe de  $p(x)$  dans chacun des cas suivants :

$$p(x) = 2x + 3$$

$$p(x) = -\frac{1}{3}x + 1$$

$$p(x) = -5x + 2$$

$$p(x) = -2x + 7$$

**EXERCICE 20**

Ecrire tous les polynômes du second degré admettant :

a) 2 et 3 pour racines

e) 0 pour racine double

b) 3 pour racine double

f)  $\frac{1}{3}$  et  $-3$  pour racines

c) 0 et  $-1$  pour racine

d)  $\frac{1}{2}$  et  $-\frac{1}{4}$  pour racines

**EXERCICE 21**

On donne des polynômes de degré 2 par leur forme canonique : en déduire leur forme factorisée et leur forme développée, puis vérifier en passant de l'une à l'autre. Cela est-il toujours possible ?

1)  $f(x) = (x+3)^2 - 4$

10)  $f(x) = \frac{2}{3}[(x-1)^2 - 1]$

2)  $f(x) = (x-1)^2 - 1$

11)  $f(x) = \frac{16}{9}[(x+1)^2 - \frac{4}{9}]$

3)  $f(x) = (x+2)^2 - 3$

12)  $f(x) = -2[(x-1)^2 - 4]$

4)  $f(x) = (x+4)^2 + 6$

13)  $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$

5)  $f(x) = 4[(x+1)^2 - 9]$

14)  $f(x) = (x - \sqrt{2})^2 + 3$

6)  $f(x) = -[(x+3)^2 + 4]$

15)  $f(x) = 0,25[(x+240)^2 - 1296]$

7)  $f(x) = 2(x - \sqrt{3})^2 - 4$

8)  $f(x) = \frac{1}{100}[(x+1000)^2 - 900]$

16)  $f(x) = 49\left[\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + 100\right]$

9)  $f(x) = -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \sqrt{3}\right]$

**EXERCICE 22**

Calculer le discriminant des polynômes suivants. En déduire le nombre de racines et éventuellement une forme factorisée du polynôme.

1)  $x^2 - x + 2$

10)  $-x^2 - x + 6$

19)  $-x^2 + 4x - 6$

2)  $2x^2 - 3x + 4$

11)  $2x^2 - 9x + 4$

20)  $10x^2 + 3x - 1$

3)  $25x^2 - 10x + 1$

12)  $0,01x^2 - 2x + 100$

21)  $4x^2 + 7x - 2$

4)  $-3x^2 + x + 1$

13)  $3x^2 - x$

22)  $3x^2 - 6x + 3$

5)  $-16x^2 + 24x - 9$

14)  $3x^2 + 8x - 3$

23)  $-6x^2 + 5x + 1$

6)  $6x^2 + 2x + 1$

15)  $x^2 + 3x + 1$

24)  $10x^2 + 999x - 100$

7)  $x^2 - 3x - 2$

16)  $3x^2 + 8x - 3$

25)  $30x^2 - 700x + 2000$

8)  $x^2 - 11x + 30$

17)  $x^2 - 6x + 8$

26)  $3x^2 + 353x - 840$

9)  $9x^2 + 6x + 1$

18)  $-x^2 + 9x - 8$

27)  $2x^2 + 1999x - 1000$

28)  $0,01x^2 - 0,5x - 500$

30)  $0,032x^2 - 7,36x + 103,2$

29)  $50x^2 - 1495x - 150$

**EXERCICE 23**

Trouver une racine évidente des polynômes suivants et les factoriser

1)  $x^2 + 2x - 3$

2)  $x^2 - 3x - 4$

3)  $x^2 + 2x$

4)  $x^2 + x - 10$

**EXERCICE 24**

Factoriser par la méthode la plus rapide les polynômes suivants

1)  $x^2 + 3x - 4$

4)  $-x^2 + 1$

2)  $5x^2 - 10$

5)  $3x^2 - 4x - 7$

3)  $3x^2 + 6x$

6)  $x^2 - 25$

**EXERCICE 25**

Trouver les coordonnées du sommet S des paraboles, courbes représentatives des fonctions suivantes.

1)  $f(x) = x^2 - x + 1$

6)  $f(x) = -x + x^2 - 3$

2)  $g(x) = 1 - 2x^2$

7)  $l(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 3$

3)  $h(x) = 1 - 6x + x^2$

8)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 4$

4)  $i(x) = (x + 2)^2 - 3$

5)  $f(x) = 3[(x - 1)^2 + 2]$

**EXERCICE 26**

Dans chacun des cas, mettre la fonction sous la forme  $f(x) = k(x - \alpha)^2 + \beta$   $k, \alpha$  où et  $\beta$  sont trois réels. Tracer les courbes représentatives des fonctions associées.

1)  $f(x) = x^2 + 2x - 1$

6)  $f(x) = -(x + 2)^2$

2)  $f(x) = 2x^2 - x + 4$

7)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$

3)  $f(x) = -3x^2 + x + 2$

8)  $f(x) = -4x^2 + 2x + \frac{3}{4}$

4)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - 1$

5)  $f(x) = 2x^2 - 20x + 1$

**EXERCICE 27**

Résoudre les inéquations suivantes :

1)  $16x^2 - 9 \leq 0$

7)  $2x^2 - 9 \leq 0$

2)  $-x^2 - x + 2 \geq 0$

8)  $(2x + 5)^2 \leq 25$

3)  $x^2 + 6 > 0$

9)  $(x - 7)^2 - 25 > 0$

4)  $\frac{1}{4}x^2 - 4x + 16 \geq 0$

10)  $3x^2 - 7x < 0$

5)  $2x^2 - 11x + 5 \leq 0$

11)  $4x^2 - 9 \leq 4x - 6$

6)  $x^2 + 2x - 8 > 0$

12)  $2x^2 - 9 \leq 0$

13)  $-x^2 + 1 \geq 0$

14)  $3x^2 + 5x - 2 > 0$

15)  $9x^2 + 12x + 4 \leq 0$

16)  $(3x + 7)(x - 2) + x^2 - 4 \geq 0$

17)  $x^2 - 9 > 2(x - 3)^2$

18)  $3x^2 - 5x + 9 \leq 3x - 1$

19)  $4x^2 - 7 > 13 - 2x$

**EXERCICE 28**Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $\frac{4}{x} = 4 - x$

2)  $\frac{2x}{x+2} = \frac{1}{x} + 2$

3)  $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x(x+3)}$

4)  $\frac{2}{x} + 1 = \frac{6}{x+1}$

5)  $\frac{1}{2} = \frac{1}{4x+2} + \frac{1}{x+2}$

6)  $\frac{1}{3x-2} + \frac{1}{4x-3} = 2$

7)  $\frac{2}{4-x} - 3 = \frac{6x}{4-5x}$

8)  $\frac{5x}{x+3} + \frac{4}{2x+6} = -8$

**EXERCICE 29**Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1)  $\frac{1}{x-1} < 2$

5)  $\frac{(x-1)^2 + 4}{x-1} \geq 0$

9)  $\frac{x^2 - 6x + 8}{2x-1}$

13)  $x - 8 + \frac{16}{x} > 0$

2)  $\frac{1}{x} \leq 4$

4)  $\frac{4}{x^2 - 2} \leq -1$

10)  $\frac{-x^2 + 8x - 15}{x^2 + 3}$

14)  $x - 1 - \frac{6}{x+4} \leq 0$

3)  $3 - \frac{6}{x+2} > x$

6)  $\frac{1}{(x-2)^2} > 25$

11)  $\frac{x-1}{x-2} \geq 3x + \frac{1}{2}$

15)  $x - 2 \geq \frac{-1}{x}$

4)  $\frac{x^2 - 6x - 7}{x+2} < 0$

7)  $2 + \frac{2-11x}{x^2 + 3x} < 0$

12)  $\frac{2x-1}{x+2} \geq 2x+3$

16)  $\frac{1}{16x} \leq x^3$

8)  $\frac{9-x}{x^2 + 1} \geq 9-x$

**EXERCICE 30**1) Tracer la représentation graphique des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x + 2$  et

$$g(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 - 1$$

2) Déterminer graphiquement, puis vérifier par le calcul, les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives des deux fonctions.

**EXERCICE 31**Soit  $p(x)$  le polynôme  $x^3 - 7x - 6$ 1) Calculer  $p(-1)$ . Déduisez - en que  $p(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois nombres qu'il faut déterminer.2) Développer le produit  $(x+1)(ax^2 + bx + c)$  et déduisez - en que les nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$ 

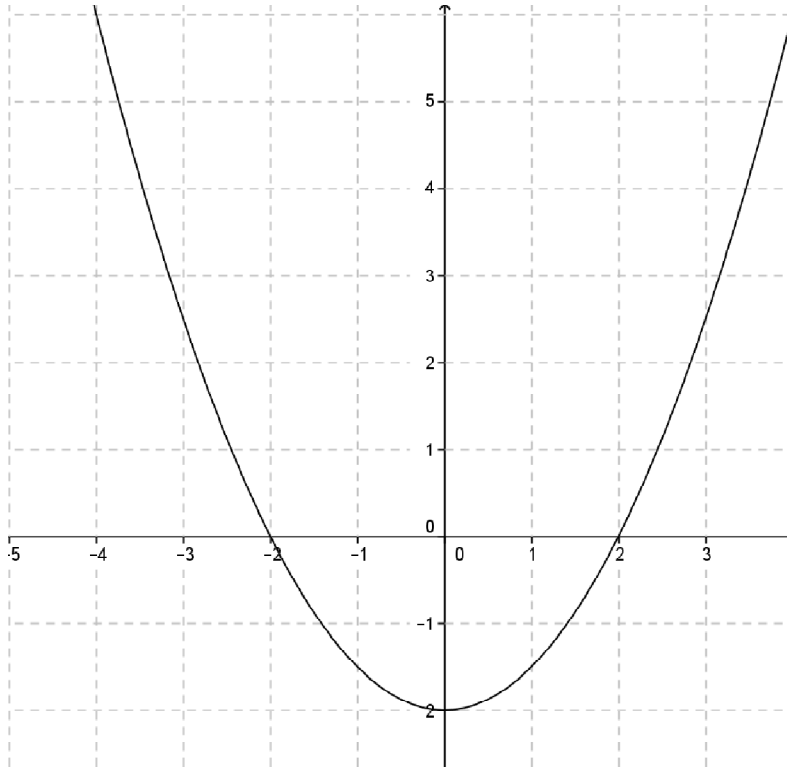
$$\text{vérifient le système } \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = -7 \\ c = -6 \end{cases}$$

Montrer que  $p(x) = (x+1)(x^2 - x - 6)$

- 3) Résolvez l'équation  $x^2 - x - 6 = 0$ . Ecrivez alors  $p(x)$  sous forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.

### EXERCICE 32

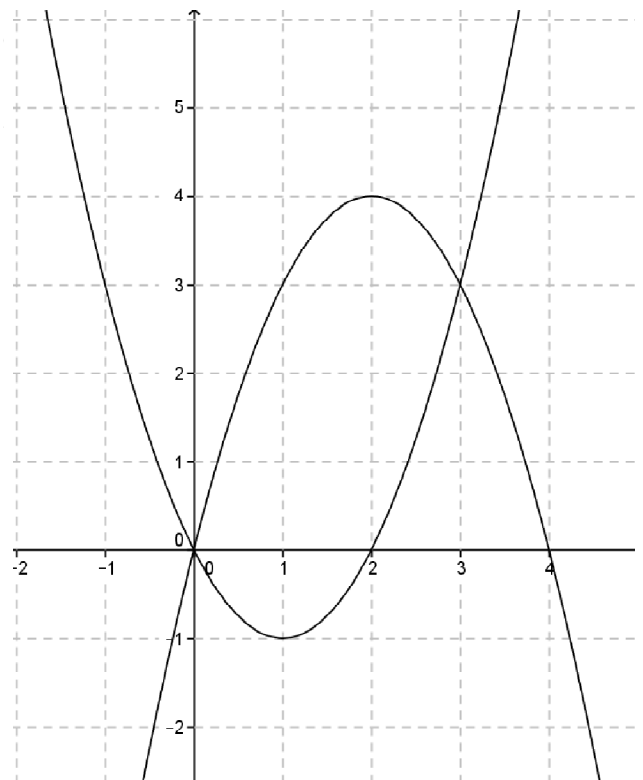
Résoudre graphiquement  $\frac{1}{2}x^2 - 2 \leq 0$



### EXERCICE 33

Résoudre graphiquement

- 1)  $x^2 - 2x \leq 0$
- 2)  $-x^2 + 4x > 0$
- 3)  $x^2 - 2x \leq -x^2 + 4x$



### EXERCICE 34

Dans chaque cas, donner le signe de l'expression donnée, selon la valeur de  $x$ , après avoir factorisé si nécessaire.



- 1)  $(x-2)(x+3)$
- 2)  $(2x-5)(x-6)$
- 3)  $(x^2-1)(x^2-4)$
- 4)  $(-x+2)(3x+18)$
- 5)  $(7x-1)(2x-5) + (2x+1)(7x-1)$
- 6)  $(5x-2)(x-2) + (x-2)(9x-2) - 8(x-2)$
- 7)  $5x(x-4)(x+2) + (x-4)(3x-5) - 13(x-4)$