VECTEURS ET BASES

EXERCICE 1

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}$

c) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OA}$

d) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{ED}$

EXERCICE 2

Soient A, B, C et D quatre points.

Construire les points E, F et G tels que

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}$

EXERCICE 3

Soit ABCD un parallélogramme.

1. Construire les points E, F, G et H tels que :

a) $\overrightarrow{DE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{DA}$ b) $\overrightarrow{AF}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{BG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{CH}=\frac{5}{4}\overrightarrow{CD}$

Montrer que EFGH est un parallélogramme.

EXERCICE 4

1) Construire les points A, B, C, D, E et F tels que
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CF}$
2) Démontrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BE}$

EXERCICE 5

Soit un triangle ABC et M le milieu de [AC].

1°) Construire le point D symétrique de A par rapport à B.

2°) Construire le point E, image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

3°) Montrer que E est le milieu de [DC]

EXERCICE 6

Soit un triangle ABC. Construire les points D, E, F et G tels que :

$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AE}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

EXERCICE 7

Soit ABCD un parallélogramme.

1) Construire le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ puis le point G tel que $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$
2) Démontrer que $\overrightarrow{GF} = 3\overrightarrow{DB}$

EXERCICE 8

Soient A et B deux points distincts.

A partir de chacune des relations vectorielles suivantes, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ puis placer le point M sur la droite (AB).

1) $\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB}$
2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
3) $\overrightarrow{MA} = \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$
4) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

EXERCICE 9

Soit ABC un triangle.

I, J et K les milieux respectifs des segments [BC],
[AC] et [AB].

On appelle centre de gravit´e du triangle ABC, le
point G vérifiant $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O}$

a) Montrer que :

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$

$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$

b) Placer le point G.

c) Soit M un point quelconque du plan.

Montrer que

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MG}$

d) Montrer que G est aussi le centre de gravité du triangle IJK.

EXERCICE 10

On considère un triangle ABC rectangle en A.

On donne AB=5 ; AC=12 et G tel que : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

a) Calculer $\left\|\overrightarrow{AG}\right\|$

b) Soit I le point défini par $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{O}$ Construire I.

c) Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6$

EXERCICE 11

Soit A, B et C trois points non alignés.

1°) Construire le point M tel que :

$5\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{CM}+3\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{CA}$

2°) Construire le point N tel que :

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

3°) Montrer que M, N et B sont alignés.

EXERCICE 12

Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points A(2 ; 5), B(4 ; −2), C(−5 ; 1) et D(−1 ; 6).

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AD}$ et de la longueur AB.
2. Que peut-on dire des droites (BC) et (AD) ?
3. Le point K est tel que $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Déterminer les coordonnées du point K.

4. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment [BC].
5. Démontrer que les points I, K et A sont alignes.

EXERCICE 13

O et A sont deux points distincts :

1. Placer les points M, N, P tels que :

a) $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}$ **b)** $\overrightarrow{ON}=-3,5\overrightarrow{OA}$ **c)** $\overrightarrow{OP}=-7\overrightarrow{OA}$

2. **a)** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OP}$ en fonction de $\overrightarrow{ON}$.

EXERCICE 14

A et B sont deux points distincts.

Placer les points M, N, P, Q tels que :

a) $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{NA}=3\overrightarrow{AB}$ **c)** $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}$ **d)** $\overrightarrow{BQ}=-2\overrightarrow{AQ}$.

EXERCICE 15

A, B, C, D sont quatre points. Démontrer que :

1. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{DA}$

2. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

EXERCICE 16

ABC est un triangle. Les points N et P sont tels que :

$\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

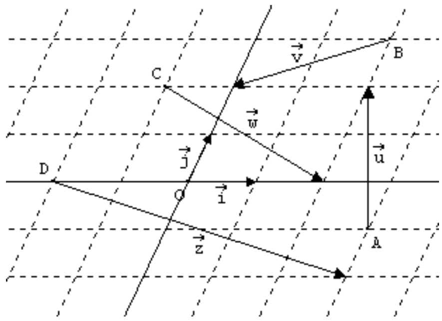
1. Placer les points N et P.

2. Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3. En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AP}$.

EXERCICE 17

Lire les coordonnées des points A, B, C, D et celles des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$



EXERCICE 18

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Placer les points A(4 ;2), B(-2 ; 1), C(-3 ; 5).

2. Représenter le vecteur $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}$; déterminer alors les coordonnées du point M.

EXERCICE 19

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, placer les points suivants :

A(5 ; 1), B(-4 ; 4), C(-3 ; -2) et D(0 ; -3).

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze.

EXERCICE 20

On se place dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soient les points $A\left(-\frac{7}{2};2\right)$; $B(-2;5)$; $C\left(5;\frac{13}{2}\right)$; $D\left(3;\frac{5}{2}\right)$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. En déduire que le quadrilatère ABCD est un trapèze.
3. On définit le point I par l'égalité : $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ID}$

Montrer que les coordonnées de I sont $\left(-23;\frac{1}{2}\right)$

4. Les points I, B et C sont-ils alignés ?

5. J et K étant les milieux respectifs de [AB] et [CD], déterminer les coordonnées de J et K. Démontrer alors que les points I, J et K sont alignés.

EXERCICE 21

ABC est un triangle.

1. Placer les points D, E et F tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

et F est le milieu de [AC].

2. Exprimer, en justifiant, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{FE}$.

3. **a)** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire un réel *k* tel que $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AE}$.

c) Que peut-on alors conclure ?

4. **a)** Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

b) Placer le point G symétrique de F par rapport à C.

Montrer que $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ puis que $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

c) En déduire la nature du quadrilatère AMDG.

EXERCICE 22

ABC est un triangle

1. Placer les points H et G vérifiant les relations suivantes :

$\overrightarrow{AH} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BG} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

2. On choisit le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

a) Donner les coordonnées des points A, B et C dans ce repère.

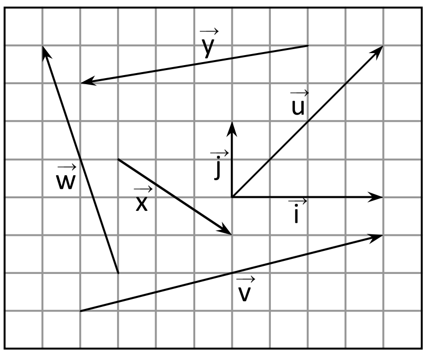
b) Déterminer les coordonnées des points H et G dans ce repère.

3. Les points A, G et H sont-ils alignés ?

EXERCICE 23

1/ Donner les coordonnées dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$ des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$, et $\vec{y}$ représentés ci-contre.

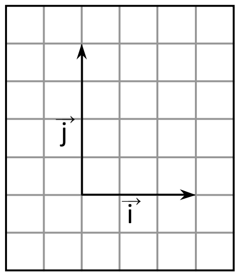
2/ Exprimer chacun de ces vecteurs en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



EXERCICE 24

1/ Reproduire la figure ci-contre.

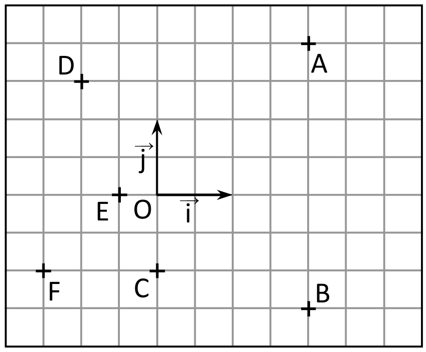
2/ Tracer un représentant de chacun des vecteurs suivants :



$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{7}{4}\end{pmatrix}$ $\vec{x}\begin{pmatrix}-2\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

EXERCICE 25



1/ Donner les coordonnées dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) des points A, B, C, D, E et F représentés ci-contre.

2/ Exprimer $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OF}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

EXERCICE 26

1/ Tracer un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

2/ Placer dans ce repère les points suivants : A(2 ; 3), B(3 ; –1), C(0 ; –4), D(–1 ; 2), E(–2 ; 0) et F(–3 ; –1).

EXERCICE 27

On considère les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ une base ($\vec{i}$; $\vec{j}$).

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ définis par :

$\vec{u} = -3\vec{a}$; $\vec{v} = \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{w} = 2\vec{c} + 3\vec{d}$; $\vec{x} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$; $\vec{y} = -\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{d}$.

Dans les exercices suivants, on se place dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

EXERCICE 28

On considère les points A(2 ; 3), B(1 ; –2), C(–3 ; –3) et D(0 ; 2).

1/ Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DC}$.

2/ Calculer les coordonnées des vecteurs

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$ et $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD}$.

EXERCICE 29

Le quadrilatère ABCD est-il un parallélogramme ?

a) A(–1 ; 3) ; B(–3 ; –2) ; C(1 ; –1) ; D(3 ; 4)

b) A(–3 ; 2) ; B(3 ; 0) ; C(2 ; –4) ; D(–5 ; –2)

EXERCICE 30

1/ On considère les points A(1 ; 3), B(2 ; 1), C(3 ; 5).

Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

2/ Même question avec A(6 ; 3), B(–5 ; –7), C(4 ; 5).

EXERCICE 31

On considère les points A(2 ; 1), B(–2 ; 3) et C(–1 ; –1).

Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}$.

EXERCICE 32

Déterminer les coordonnées du milieu I de [AB] dans les cas suivants :

a) A(1 ; 4) et B(3 ; 2) b) A(–1 ; 3) et B(5 ; 2)

c) A(–2 ; –3) et B(–3 ; 3).

EXERCICE 33

On considère les points A(–3 ; 4) et I(2 ; –4)

Déterminer les coordonnées de B tel que I soit le milieu de [AB].

EXERCICE 34

ABCD est un quadrilatère convexe ; I est le milieu de [AB], J celui de [BC], K celui de [CD] et L celui de [DA].

1. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$.

2. En déduire la nature du quadrilatère IJKL.

EXERCICE 35

ABC est un triangle. Les points N , P et Q sont tels que :

$\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et enfin $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

1. Placer les points N ,P et Q sur la figure1 de l'annexe 1 à rendre avec la copie.

2. Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3. Déterminez un réel k tel que $\overrightarrow{AP} = k\,\overrightarrow{AN}$

4. Que peut on dire des points *A, N et P* ? Justifiez votre réponse

5. Montrer que les droites (NQ) et (AB) sont parallèles. (On pourra exprimer $\overrightarrow{NQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis établir que $\overrightarrow{NQ} = \frac{17}{12}\overrightarrow{AB}$)

EXERCICE 36

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. La figure sera complétée tout au long des questions Placer les points $A\left(-2\,;\,\frac{5}{2}\right)$, $B\left(4\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ et $C\left(\frac{7}{2}\,;-\,\frac{3}{2}\right)$

1. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ et placer I
2. Après avoir calculé AB^2, AC^2 et BC^2, en déduire la nature exacte du triangle ABC

3. Soit le vecteur $\vec{u}(-1;-2)$ et D le point tel que $\overrightarrow{AD} = 2\vec{u}$
   a) Construire D et déterminer les coordonnées de ce point par le calcul.
   (On pourra exprimer $\overrightarrow{OD}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ *et* $\vec{u}$)
   b) Etudier la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$; en déduire la position relative des droites *(BC)* et *(AD)* .
   c) Démontrer que *ABCD* est un trapèze.
4. Soit $F(-\frac{3}{2};y)$ où *y* est un nombre réel. Déterminer *y* pour que le point *F* appartienne à la droite (CI). Placer *F* dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
5. Quelle est la nature du quadrilatère *ACBF* ? Justifier
6. Le point *B* appartient-il au cercle de diamètre [*AC*] ? Justifier la réponse.

EXERCICE 37

En décomposant $\overrightarrow{CB}$ en $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$, exprimer les vecteurs suivants en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$; $\vec{v} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$.

EXERCICE 38

Propriété du centre de gravité d'un triangle

ABC est un triangle ; A' est le milieu de [BC].

On se propose de démontrer la propriété :

« Dire que G est le centre de gravité de ABC équivaut à dire que G est le point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. »

1. Quelle égalité vectorielle entre $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA'}$ caractérise le centre de gravité ?

2. a) Prouver que : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$.

b) En déduire que : « $\overrightarrow{GA} = -2\,\overrightarrow{GA'}$ équivaut à : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ».

Conclure.

EXERCICE 39

ABC est un triangle tel que le point A' est le milieu de [BC], B' celui de [CA] et C' celui de [AB].

1. a) Justifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$.

b) De même, exprimer $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ en fonction d'un seul vecteur.

2. En déduire que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

EXERCICE 40

ABC est un triangle ; I est le milieu de [AB].

1. a) Construire le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

2. On note K le point tel que $2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

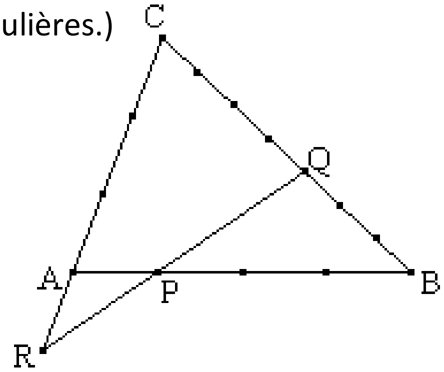
a) Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Construire K.

b) En déduire que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et que $\overrightarrow{IJ} = 3\,\overrightarrow{IK}$.

Que dire alors des points I, J et K ?

EXERCICE 41

ABC est un triangle ; P est un point de (AB), Q un point de (BC) et R un point de (AC) disposés comme sur le dessin. (Les graduations sur les droites sont régulières.)



1. Donner les valeurs des réels α, β et γ tels que :

$\overrightarrow{AP} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AR} = \beta\,\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BQ} = \gamma\,\overrightarrow{BC}$.

2. Exprimer $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. Démontrer que $\overrightarrow{PQ} = \frac{9}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$.

4. Justifier que $\overrightarrow{PQ} = -\frac{9}{7}\overrightarrow{PR}$. Que conclure ?

EXERCICE 42

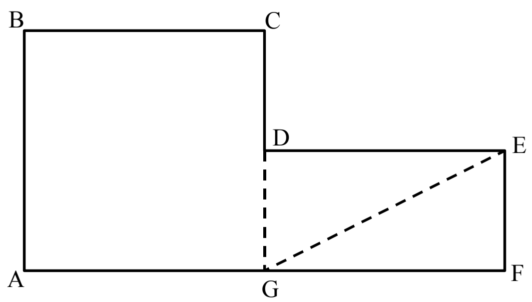
OIJK est un parallélogramme. A, B et G sont trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

Choisir un repère pour démontrer que les points O, G et J sont alignés.

EXERCICE 43

Dans le polygone ci-dessous, ABCDG est un carré.

D et G sont respectivement les points milieu des côtés CG et AF. De plus, le côté AB est parallèle au côté EF.



À l'aide des propriétés des vecteurs, montrez que. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GE}$